Chaînes de Markov - Exercices

Pré-rentrée du MVA

Raphaël Forien
raphael.forien@cmap.polytechnique.fr

Jeudi 22 septembre 2016

1 Chaînes de Markov

EXERCICE 1 - On considère un individu qui porte deux copies d'un gène, ce dernier pouvant être présent sous deux formes A ou a. À chaque génération, l'individu en question est remplacé par un descendant dont les deux copies du gène sont prises uniformément au hasard (et indépendamment l'une de l'autre) parmi celles de son parent. Le premier individu porte une copie de chaque version (Aa), et on observe les deux gènes portés par l'individu présent à la génération n. Écrire la matrice de transition correspondante. Que peut-on dire des états homozygotes (AA et aa) ? Cette chaîne de Markov est-elle irréductible ?

EXERCICE 2 - Soit Q une matrice de transition $E = (y_i)_{i\geq 1}$ et $x \in E$. Soit $(\xi_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. uniformes sur $[0, 1]$. On pose

$$\begin{cases} X_0 = x, \\ X_{n+1} = f(X_n, \xi_{n+1}), \qquad n \geq 0. \end{cases}$$

où $f(x, u) = y_i$ avec $i = \inf \left\{ k \geq 1 : \sum_{j=1}^{k} Q(x, y_j) \geq u \right\}$. Montrer que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

2 Propriété de Markov

EXERCICE 3 - Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov et soient $f : E^{n+1} \to \mathbb{R}$, $g : E^{\otimes \mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables positives. Montrer que, quelque soit μ,

$$\mathbb{E}_\mu \left[f(X_0, X_1, \ldots, X_n) g(X_{n+1}, X_{n+2} \ldots) \mid X_n \right] = \mathbb{E}_\mu \left[f(X_0, \ldots, X_n) \mid X_n \right] \mathbb{E}_\mu \left[g(X_{n+1}, \ldots) \mid X_n \right].$$

Autrement dit, le passé et le futur sont indépendants conditionnellement au présent. *Indication : utiliser l'exercice 1 de la feuille sur le conditionnement et écrire le membre de gauche comme* $\mathbb{E}_\mu \left[\mathbb{E}_\mu \left[f.g \mid X_0, \ldots X_n \right] \mid X_n \right]$.

EXERCICE 4 -[Équation de Chapman-Kolmogorov] Montrer la relation

$$\mathbb{P}_x \left(X_{m+n} = z \right) = \sum_y \mathbb{P}_x \left(X_m = y \right) \mathbb{P}_y \left(X_n = z \right).$$

EXERCICE 5 -[Temps d'atteinte d'un ensemble] Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q à valeurs dans E, et soit F un sous-ensemble strict non vide de E. On pose

$$T_F = \inf \left\{ n \geq 0 : X_n \in F \right\}.$$

Soit h une fonction positive bornée définie sur F.

1. Montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in E, \qquad g(x) = \mathbb{E}_x \left[h(X_{T_F}) \mathbb{1}_{T_F < \infty} \right]$$

est solution du problème

$$\begin{cases} g(x) = Qg(x) & \forall x \in F^c, \\ g(x) = h(x) & \forall x \in F. \end{cases}$$

On va montrer que g est la solution positive minimale de ce problème.

2. Soit f une autre solution positive de ce problème. Montrer que, pour tout $n \geq 0$,

$$f(x) = \mathbb{E}_x \left[f(X_{n \wedge T_F}) \right].$$

3. En déduire que $f \geq g$.

EXERCICE 6 - Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q et soit $x \in E$. On pose $T_x = \inf\{n \geq 1 : X_n = x\}$ et $N_x = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{X_n = x}$. On rappelle que $\mathbb{P}_x$ désigne la loi de $(X_n)_{n \geq 0}$ lorsque $X_0 = x$.

1. Utiliser la propriété de Markov forte pour montrer que pour $k \geq 0$ $\mathbb{P}_x(N_x \geq k+1) = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)\,\mathbb{P}_x(N_x \geq k)$.
2. En déduire que si $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) = 1$, $N_x = \infty$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, et que si $\mathbb{P}_x(T_x < \infty) < 1$, alors $N_x < \infty$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement.

3 Mesures invariantes

EXERCICE 7 -[Urnes d'Ehrenfest] On dispose de deux urnes, dans lesquelles sont réparties N boules. La première urne contient k boules et la seconde $N - k$. À chaque étape, on prend l'une des N boules uniformément au hasard et on la change d'urne.

1. Écrire la matrice de transition correpsondant à la chaîne de Markov où X_n désigne le nombre de boules dans la première urne à l'étape n.
2. Trouver la probabilité invariante pour cette chaîne de Markov.

EXERCICE 8 - Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q. Montrer que $(X_n)_n$ est irréductible si et seulement s'il n'existe pas de sous-ensemble strict non vide F de E tel que

$$\forall x \in F, y \in F^c, \quad Q(x, y) = 0.$$

EXERCICE 9 - Soit $(X_n)_n$ la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$. On admet qu'elle est récurrente. Montrer que, pour $k \neq 0$, l'espérance du nombre de visites de X_n en k avant le premier retour en 0 est 1.

EXERCICE 10 -[Processus de naissance et de mort] Soit Q la matrice de transition sur $\mathbb{N}$ donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

avec $p_0 > 0$, $p_0 + r_0 = 1$, $p_i + r_i + q_i = 1$ pour $i \geq 1$. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov à valeurs dans $\mathbb{N}$ de matrice de transition Q.

1. montrer que X est irréductible.
2. On suppose que

$$\sum_{i \geq 1} \frac{p_0 \cdots p_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} < \infty.$$

Montrer que X admet une mesure de probabilité réversible π qu'on déterminera. Que peut-on en déduire sur X ?

3. On considère le cas où $p_i = p > 0$ pour tout $i \geq 0$ et $q_i = q > 0$ pour tout $i \geq 1$ avec $p < q$. Calculer $\mathbb{E}_i[T_i]$ pour $i \geq 0$ où T_i est le premier temps de retour à l'état i.

EXERCICE 11 - Le but de cet exercice est de montrer que si Q est irréductible et que π est une probabilité invariante, alors toute mesure invariante est multiple de π.

1. Justifier que $\pi(x) > 0$ pour tout $x \in E$.
   Soit $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction strictement concave bornée. On définit l'entropie de μ par
$$\mathcal{E}(\mu) = \sum_y \phi\left(\frac{\mu(y)}{\pi(y)}\right)\pi(y).$$
2. Montrer que $\mathcal{E}(\mu Q) \geq \mathcal{E}(\mu)$.
3. On suppose que $Q(x,y) > 0$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que si μ est une mesure invariante, alors $\frac{\mu(x)}{\pi(x)}$ est constant.
4. Conclure dans le cas général. (On pourra considérer $\bar{Q}(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} Q^n(x,y)$.)

4 Comportement asymptotique

EXERCICE 12 -[Durée de vie des ampoules] Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $m = \mathbb{E}[Y_1] < \infty$. On définit le processus $(X_n)_n$ par $X_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$,
$$X_n = \inf\{l \geq n : \exists k \geq 1, Y_1 + \ldots + Y_k = l\} - n.$$
La variable Y_i représente la durée de vie d'une ampoule. Lorsque la k-ième ampoule cesse de fonctionner, on la remplace par la $(k+1)$-ième, dont la durée de vie est Y_{k+1}. X_n est alors le temps qu'il reste avant que l'ampoule actuellement en fonction tombe en panne (faire un dessin). Quel est le comportement asymptotique du nombre d'ampoules utilisées à l'instant n ?