Rappels de Probabilités - Exercices

Pré-rentrée du MVA

Raphaël Forien
raphael.forien@cmap.polytechnique.fr

Jeudi 22 septembre 2016

1 Variables aléatoires discrètes

EXERCICE 1 - Soient E et F des ensembles finis. Montrez qu'il est équivalent de supposer que X et Y sont deux v.a. indépendantes de lois uniformes sur E et F, ou de supposer que le couple (X, Y) est de loi uniforme sur $E \times F$.

EXERCICE 2 - Soit X_1, X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$.
1) Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2) Calculer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$. Reconnaître cette loi.
3) Calculer $\mathbb{E}[X_1 \mid X_1 + X_2]$.

EXERCICE 3 - Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p. Pour tout $n \geq 1$, on définit par récurrence, $T_n = \inf\{k > T_{n-1}\,;\, X_k = 1\}$ si cet infimum est fini, $T_n = \infty$ sinon, et $T_0 = 0$.
1) Démontrer que les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \ldots, T_n - T_{n-1}, \ldots$ sont indépendantes et de même loi.
2) Calculer la loi de T_1 et sa fonction génératrice. En déduire celle de T_n.

EXERCICE 4 - Soient X et Y deux variables définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ne pouvant prendre que deux valeurs distinctes. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$. Montrer que ce résultat est faux si X, Y prennent plus de deux valeurs.

2 Variables aléatoires réelles

EXERCICE 5 - Soient X et Y deux v.a. réelles définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.

   On suppose que X et Y ont même loi.
2. Montrer que pout tout fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne, $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.
3. Soit Z une troisième v.a. réelle définie sur le même espace. Montrer que XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

EXERCICE 6 - On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

EXERCICE 7 - La fonction "rand" de scilab vous permet de générer une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Comment générer à partir de U une variable X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$?
2. Soit $a > 0$. Quelle est la loi de $Y = \lfloor aX \rfloor + 1$?

EXERCICE 8 - Soit X une v.a. réelle de fonction de répartition $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$, $t \in \mathbb{R}$.

1. Si F est continue et strictement croissante, et si U est une v.a. uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général, on pose
$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\}.$$
Quelle est la loi de $F^{-1}(U)$?

EXERCICE 9 - Une v.a. réelle X est dite symétrique si $-X$ a la même loi que X.

1. Soit X une v.a. réelle de densité f sur $\mathbb{R}$. Montrer que X est symétrique si et seulement si $f(x) = f(-x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que X est symétrique si et seulement si sa fonction caractéristique est réelle.
3. Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes et de même loi. Montrer que la v.a. $X - Y$ est symétrique.

EXERCICE 10 - On considère un système constitué de n composants. On suppose que les durées de vie des composants sont des variables exponentielles $T_1, \ldots, T_n$ de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ et qu'elles sont indépendantes, ce qui implique en particulier que $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $\{T_1 \leq t_1\}, \ldots, \{T_n \leq t_n\}$ sont indépendants ainsi que les événements $\{T_1 > t_1\}, \ldots, \{T_n > t_n\}$.

1. On suppose que le système est en parallèle i.e. qu'il fonctionne lorsqu'un au moins des composants fonctionne. Exprimer sa durée de vie T en fonction des T_i. Déterminer la fonction de répartition de T.
2. Même question dans le cas où le système est en série i.e. où il fonctionne seulement lorsque tous les composants fonctionnent.

EXERCICE 11 - Soient X et Y deux v.a. réelles indépendantes, identiquement distribuées et centrées. Montrer que
$$\mathbb{E}[|X - Y|] \geq \mathbb{E}[|X|].$$
(*Indication : poser* $f(y) = \mathbb{E}[|X - y|]$.)

3 Convergence de variables aléatoires

EXERCICE 12 - Déterminer sans calcul les limites suivantes.

1. $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]^n} f\left(\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\right) \mathrm{d}\,x_1 \ldots \mathrm{d}\,x_n$ pour une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.
2. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $p \in [0,1]$.
3. $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$ pour une fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$ et $\lambda > 0$.

EXERCICE 13 - Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. Pour tout entier n, on pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$ et on définit Z comme la limite des Z_n.

1. La loi de Z_n admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?
2. Pour tout entier k inférieur à 2^n, montrez que $\mathbb{P}(k2^{-n} \leq Z < (k+1)2^{-n}) = 2^{-n}$.
3. Quelle est la loi de Z ? A-t-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?

EXERCICE 14 - Soient $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ des suites de v.a. réelles et X, Y des v.a. réelles. On suppose que $X_n \to X$ en loi et $Y_n \to Y$ en loi.

1. Montrer que (X_n, Y_n) ne converge pas forcément en loi vers (X, Y).
2. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n et Y_n sont indépendantes et que X et Y sont indépendantes. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
3. **Lemme de Slutsky** On suppose que Y est constante p.s. Montrer que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

EXERCICE 15 - Chaque paquet de céréales contient un morceau d'un puzzle à N pièces. Soit T le nombre aléatoire de paquets qu'il faut acheter pour obtenir toutes les pièces. On veut calculer par exemple $\mathbb{E}[T]$ sans déterminer la loi de T. Pour cela, on introduit les temps successifs $X_1, X_2, \cdots, X_N$ où pour la première fois $1, 2, \cdots, N$ pièces du puzzle sont réunies.

a) Déterminer la loi des variables aléatoires $X_{k+1} - X_k$, puis calculer $\mathbb{E}[T]$.
b) Quelle est la variance de T ? Montrer que $\mathbb{V}[T]/N^2$ est borné quand $N \to \infty$.
c) Montrer que $a^2\mathbb{P}(Z > a) \leq \mathbb{E}\left[Z^2\right]$ pour toute variable aléatoire Z positive et $a > 0$.
d) En déduire que $\frac{T}{(N \ln N)}$ converge en probabilité vers 1 quand $N \to \infty$.

EXERCICE 16 - Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit la loi $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$ avec $m_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$. Montrer que cette suite converge en loi vers une v.a. réelle Y si et seulement si les deux suites $(m_n)_n$ et $(\sigma_n)_n$ convergent, et identifier la limite.

4 Vecteurs gaussiens

EXERCICE 17 - Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires i.i.d gaussiennes centrées réduites. On pose $X = (X_1, \dots, X_n)$.

1. Calculer la fonction caractéristique de X.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et $B \in \mathbb{R}^n$. Calculer la fonction caractéristique du vecteur $AX + B$.
3. Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que X et PX ont même loi. En déduire que la loi de $\frac{X}{||X||}$ est une mesure de probabilité sur la sphère unité $S^{(n-1)}$ de $\mathbb{R}^n$ invariante par toute transformation orthogonale (cette propriété caractérise la mesure uniforme sur $S^{(n-1)}$).

5 Conditionnement

EXERCICE 18 - Soient X, Y, Z des v.a. à valeurs dans un espace dénombrable E définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'il existe une fonction mesurable $f : E \to E$ telle que $Z = f(Y)$, montrer que

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Z] \mid Y] = \mathbb{E}[X \mid Z], \qquad \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid Y] \mid Z] = \mathbb{E}[X \mid Z].$$

EXERCICE 19 - Soient X et Y deux variable aléatoire à valeurs réelles telles que (X, Y) admette une densité $f(x, y)$. On suppose pour simplifier que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx > 0$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $g(X) \in L^1$. Montrer que $\mathbb{E}[g(X) \mid Y] = h(Y)$ avec

$$h(y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} g(x)f(x, y)dx}{\int_{\mathbb{R}} f(x, y)dx}.$$

EXERCICE 20 -

1. Soient X et Y deux variable aléatoire indépendantes de loi de Bernoulli de paramètres respectifs p et q dans $]0, 1[$. On pose $Z = \mathbb{1}_{X+Y>0}$. Calculer $\mathbb{E}[X \mid Z]$ et $\mathbb{E}[Y \mid Z]$. Ces deux variable aléatoire sont-elles indépendantes ?
2. Soient U et V deux variable aléatoire définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable quelconque $(E, \mathcal{E})$. On suppose que pour toute sous-tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{A}$, pour toutes fonctions réelles mesurables et bornées f et g définies sur $(E, \mathcal{E})$, $\mathbb{E}[f(U) \mid \mathcal{G}]$ et $\mathbb{E}[g(V) \mid \mathcal{G}]$ sont indépendantes. Montrer que l'une des deux variable aléatoire U ou V est constante.

EXERCICE 21 - Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de densité $\lambda^2 y e^{-\lambda y}$ pour $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire dont la loi conditionnelle sachant Y est la loi uniforme sur $[0, Y]$. Montrer que X et $Y - X$ sont deux variable aléatoire indépendantes et déterminer leurs lois respectives.