Torsion dans l'homologie des groupes kleinéens arithmétiques

Aurel Page
collaborations avec Alex Bartel et Haluk Şengün
University de Warwick

11 décembre 2015

Séminaire de géométrie et algèbre effectives

Plan

- Groupes kleinéens arithmétiques
- La conjecture de Jacquet–Langlands pour la torsion
- Variétés isospectrales et torsion dans l'homologie

Groupes kleinéens arithmétiques

Groupes arithmétiues

Groupe arithmétique $\approx \mathbb{G}(\mathbb{Z})$ pour $\mathbb{G}$ groupe algébrique linéaire sur $\mathbb{Q}$.

Exemples : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_F), O(q_{\mathbb{Z}})$.

Motivation :

- Théories de réduction classiques : Gauss, Minkowski, Siegel.
- Classe intéressante de réseaux dans des groupes de Lie.
- Automorphismes d'objets naturels : formes quadratiques, variétés abéliennes.
- Formes modulaires / formes automorphes.
- Paramétrage de structures : variétés de Shimura, constructions de Bhargava.

Groupes kleinéens arithmétiques

Groupe kleinéen arithmétique $=$ sous-groupe arithmétique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Pourquoi étudier ce cas ?

- Petite dimension : géométrie plus simple mais arithmétique riche.
- Variétés hyperboliques de dimension 3.
- Lien avec les unités dans les algèbres de quaternions.

Groupes kleinéens arithmétiques

F corps de nombres avec $r_2 = 1$. Exemple : $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

B **algèbre de quaternions** sur F :
$B = F + Fi + Fj + Fij$ avec $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ij$.
Ramifiée aux places réelles : $a, b \ll 0$
Exemple : $B = \mathcal{M}_2(F)$ $(a = b = 1)$.

Norme réduite :
nrd : $B \to F$ multiplicative
$\mathrm{nrd}(x + yi + zj + tij) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$.
Exemple : nrd $=$ det

$\mathcal{O}$ **ordre** dans B : sous-anneau, $\mathbb{Z}$-module de type fini, $\mathcal{O}F = B$.
Exemple : $\mathcal{O} = \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_F)$.

$\Gamma = \mathcal{O}^1/\{\pm 1\} \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$

Domaines de Dirichlet

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit sur l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$ de dimension 3.

Domaines de Dirichlet

$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ agit sur l'espace hyperbolique $\mathcal{H}^3$ de dimension 3.

$$D_p(\Gamma) = \{x \in \mathcal{H}^3 \mid d(x,p) \leq d(\gamma x, p) \text{ pour tout } \gamma \in \Gamma\}$$

est un domaine fondamental de volume fini, avec un nombre fini de faces, qui fournit une présentation de Γ.

Exemple :

$$D_{2i}(\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})) = \text{ domaine fondamental habituel.}$$

Algorithmes

Algorithme de base :

- Énumérer des éléments de Γ et calculer le domaine de Dirichlet partiel.
- Arrêt quand le domaine de peut plus diminuer.

Algorithmes

Algorithme de base :

- Énumérer des éléments de Γ et calculer le domaine de Dirichlet partiel.
- Arrêt quand le domaine de peut plus diminuer.

Algorithme efficace :

- Énumeration efficace de Γ.
- Il suffit de trouver n'importe quel ensemble de générateurs.
- Critère d'arrêt utilisant une formule du volume et la structure combinatoire du domaine de Dirichlet.

Jacquet–Langlands pour la torsion

collaboration avec Haluk Şengün

Jacquet–Langlands pour la torsion

collaboration avec Haluk Şengün

- Cohomologie et représentations galoisiennes
- La conjecture de Jacquet–Langlands pour la torsion

Cohomologie et formes automorphes

Formle de Matsushima : Γ sous-groupe discret cocompact du groupe de Lie connexe G, E représentation de G.

$$H^i(\Gamma, E) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} \mathrm{Hom}(\pi, L^2(\Gamma \backslash G)) \otimes H^i(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes E)$$

La cohomologie admet une action d'opérateurs de Hecke, compatibles avec ceux sur les formes automorphes.

$\rightsquigarrow$ On devrait pouvoir attacher des représentations Galoisiennes aux classes propres pour les opérateurs Hecke.

Torsion et représentations galoisiennes

Théorème (Scholze, conjecture de Ash)

Soit Γ *un sous-groupe de congruence de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}_F)$ *où* F *est un corps CM. Alors pour tout système de valeurs propres de Hecke dans* $H^i(\Gamma, \mathbb{F}_p)$*, il existe une représentations continue semi-simple* $\rho : \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \to \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *vérifiant la relation*

$$\det(X - \rho(\mathrm{Frob}_\ell)) = X^2 - a_\ell X + N(\ell)$$

pour presque tout $\ell \subset \mathbb{Z}_F$*.*

Jacquet–Langlands classique

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
B algèbre de quaternions sur F de discriminant $\mathfrak{D}$ (idéal : ensemble des mauvais premiers). $\mathfrak{N}$ idéal premier à $\mathfrak{D}$.

On obtient deux groupes kleinéens arithmétiques :

- $\Gamma_0(\mathfrak{N}\mathfrak{D}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$
- $\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N}) \subset B^1/\{\pm 1\}$

Jacquet–Langlands classique

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
B algèbre de quaternions sur F de discriminant $\mathfrak{D}$ (idéal : ensemble des mauvais premiers). $\mathfrak{N}$ idéal premier à $\mathfrak{D}$.

On obtient deux groupes kleinéens arithmétiques :

- $\Gamma_0(\mathfrak{N}\mathfrak{D}) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$
- $\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N}) \subset B^1/\{\pm 1\}$

Théorème (Jacquet–Langlands)

Il existe un isomorphisme préservant les opérateurs de Hecke :

$$H_1(\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N}), \mathbb{C}) \to H_{1,cusp}(\Gamma_0(\mathfrak{N}\mathfrak{D}), \mathbb{C})^{\mathfrak{D}-new}$$

Conjecture naive pour la torsion

Conjecture (naive)

Il existe un isomorphisme préservant les opérateurs de Hecke :

$$H_1(\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N}), \mathbb{Z}) \to H_{1,cusp}(\Gamma_0(\mathfrak{N}\mathfrak{D}), \mathbb{Z})^{\mathfrak{D}-new}$$

Classes de congruence

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathfrak{D} = 2\mathfrak{p}_3$

$H_1(\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(1), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/20$

$H_1(\Gamma_0(\mathfrak{D}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/6$

Classes de congruence

$F = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $\mathfrak{D} = 2\mathfrak{p}_3$

$H_1(\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(1), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/20$

$H_1(\Gamma_0(\mathfrak{D}), \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/6$

Problème : classes de congruence, telles que $\Gamma_0(\mathfrak{N})/\Gamma_1(\mathfrak{N}) \to (\mathbb{Z}_F/\mathfrak{N})^\times$.

Plus généralement, classes d'Eisenstein : valeur propre de $T_\mathfrak{p}$ est $\chi_1(\mathfrak{p}) + \chi_2(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})$ pour des caractères χ_1, χ_2 de groupes de classes de rayon.

Élévation de niveau

(au tableau)

Jacquet–Langlands pour la torsion

$\mathfrak{m}$ idéal maximal de l'algèbre de Hecke $=$ système de valeurs propre de Hecke modulo un premier p.

Conjecture (Calegari–Venkatesh)

Si $\mathfrak{m}$ n'est pas Eisenstein, alors

$$|H_1(\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N}), \mathbb{Z})_{\mathfrak{m}}| = |H_{1,cusp}(\Gamma_0(\mathfrak{N}\mathfrak{D}), \mathbb{Z})_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{D}-new}|$$

Jacquet–Langlands pour la torsion

$\mathfrak{m}$ idéal maximal de l'algèbre de Hecke $=$ système de valeurs propre de Hecke modulo un premier p.

Conjecture (Calegari–Venkatesh)

Si $\mathfrak{m}$ n'est pas Eisenstein, alors

$$|H_1(\Gamma_0^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{N}), \mathbb{Z})_{\mathfrak{m}}| = |H_{1,cusp}(\Gamma_0(\mathfrak{N}\mathfrak{D}), \mathbb{Z})_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{D}-new}|$$

Théorème (Calegari–Venkatesh) : version numérique (sans opérateurs de Hecke) dans certains cas.

Test de la conjecture

- Test systématique avec un nombre fini d'opérateurs de Hecke
- Preuve automatique pour les systèmes de valeurs propres dans $\mathbb{F}_2$ et $\mathbb{F}_3$ en utilisant Scholze + résolubilité de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

Variétés isospectrales et torsion dans l'homologie

collaboration avec Alex Bartel

Variétés isospectrales et torsion dans l'homologie

collaboration avec Alex Bartel

- Variétés isospectrales
- Torsion dans leur homologie
- Calculs et exemples

Peut-on entendre la forme d'un tabour ?

Peut-on entendre la forme d'un tabour ?

Question mathématique (Kac 1966) :
M, M' même spectre pour l'opérateur de Laplace (**isospectrales**)
$\Longrightarrow M, M'$ isometriques ?

Variété riemannienne compacte $M \rightsquigarrow$ opérateur de Laplace–Beltrami Δ sur les fonctions (opérateur différentiel d'ordre 2).

Spectre discret : $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

Peut-on entendre la forme d'un tabour ?

Question mathématique (Kac 1966) :
M, M' même spectre pour l'opérateur de Laplace (**isospectrales**)
$\Longrightarrow M, M'$ isometriques ?

Variété riemannienne compacte $M \rightsquigarrow$ opérateur de Laplace–Beltrami Δ sur les fonctions (opérateur différentiel d'ordre 2).

Spectre discret : $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$

Réponse :

Milnor 1964 : Non ! (dimension 16)

Sunada 1985 : Non ! (dimension d)

Gordon, Webb, Wolpert 1992 : Non ! (domaines du plan)

Quelles propriétés des tambours peut-on entendre ?

Quelles propriétés des tambours peut-on entendre ?

Volume : loi de Weyl

Nombres de Betti (si fortement isospectrales)

Torsion dans l'homologie ?

Quelles propriétés des tambours peut-on entendre ?

Volume : loi de Weyl

Nombres de Betti (si fortement isospectrales)

Torsion dans l'homologie ?

Sunada : Non ! (dimension 4)

Question plus fine : petite dimension, classes particulières de variétés

Dimension 2 orientable $\Longrightarrow$ homologie sans torsion

Dimension 3 orientable $\Longrightarrow$ H_0, H_2 et H_3 sans torsion

Quelles propriétés des tambours peut-on entendre ?

Volume : loi de Weyl

Nombres de Betti (si fortement isospectrales)

Torsion dans l'homologie ?

Sunada : Non ! (dimension 4)

Question plus fine : petite dimension, classes particulières de variétés

Dimension 2 orientable $\Longrightarrow$ homologie sans torsion

Dimension 3 orientable $\Longrightarrow$ H_0, H_2 et H_3 sans torsion

Théorème (P., Bartel)

Pour tout premier $p \leq 37$, il existe une paire de 3-variétés hyperboliques compactes M, M' qui sont fortement isospectrales et revêtent une variétés commune, mais avec

$$|H_1(M,\mathbb{Z})[p^\infty]| \neq |H_1(M',\mathbb{Z})[p^\infty]|$$

Corps de nombres isospectraux

Des corps de nombres K, K' sont **arithmétiquement équivalents**, ou **isospectraux** si $\zeta_K = \zeta_{K'}$ mais $K \not\cong K'$.

Corps de nombres isospectraux

Des corps de nombres K, K' sont **arithmétiquement équivalents**, ou **isospectraux** si $\zeta_K = \zeta_{K'}$ mais $K \not\cong K'$.

Même degré, même signature.

Même discriminant.

Mêmes racines de l'unité.

Même produit nombre de classes $\times$ régulateur.

Même nombre de classes ?

Corps de nombres isospectraux

Des corps de nombres K, K' sont **arithmétiquement équivalents**, ou **isospectraux** si $\zeta_K = \zeta_{K'}$ mais $K \not\cong K'$.

Même degré, même signature.

Même discriminant.

Même plus grand sous-corps qui soit galoisien sur $\mathbb{Q}$

Mêmes racines de l'unité.

Même produit nombre de classes $\times$ régulateur.

Même nombre de classes ?

Corps de nombres isospectraux

Des corps de nombres K, K' sont **arithmétiquement équivalents**, ou **isospectraux** si $\zeta_K = \zeta_{K'}$ mais $K \not\cong K'$.

Même degré, même signature.

Même discriminant.

Même plus grand sous-corps qui soit galoisien sur $\mathbb{Q}$

Mêmes racines de l'unité.

Même produit nombre de classes $\times$ régulateur.

Même nombre de classes ?
Dyer 1999 : Non !

Seuls exemples connus où $v_p(h_{K_1}) \neq v_p(h_{K_2})$: $p = 2, 3, 5$.

Formules de valeurs spéciales

Formule analytique du nombre de classes :

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_K R_K}{w_K|D_K|^{1/2}}$$

Formules de valeurs spéciales

Formule analytique du nombre de classes :

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_K R_K}{w_K|D_K|^{1/2}}$$

Spectre de Δ sur les *i*-formes : $\zeta_{M,i}(s) = \sum \lambda^{-s}$.

Formules de valeurs spéciales

Formule analytique du nombre de classes :

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_K R_K}{w_K|D_K|^{1/2}}$$

Spectre de Δ sur les i-formes : $\zeta_{M,i}(s) = \sum \lambda^{-s}$.
Théorème de Cheeger–Müller (conjecturé par Ray–Singer) :

$$\prod_i \left(R_i(M)\cdot |H_i(M,\mathbb{Z})_{tors}|\right)^{(-1)^i} = \prod_i \exp(\tfrac{1}{2}\zeta'_{M,i}(0))^{(-1)^i}$$

$R_i(M)$ régulateur de $H_i(M,\mathbb{Z})/H_i(M,\mathbb{Z})_{tors}$.

Exemples de régulateurs

$$R_0(M) = \mathrm{Vol}(M)^{-1/2}$$

$$R_d(M) = \mathrm{Vol}(M)^{1/2}$$

Construction d'objets isospectraux

Triplets de Gassmann (1925) :
G groupe fini et H, H' sous-groupes tels que

$$\mathbb{C}[G/H] \cong \mathbb{C}[G/H'].$$

$\iff$ pour toute classe de conjugaison C, $|C \cap H| = |C \cap H'|$.

Construction d'objets isospectraux

Triplets de Gassmann (1925) :
G groupe fini et H, H' sous-groupes tels que

$$\mathbb{C}[G/H] \cong \mathbb{C}[G/H'].$$

$\iff$ pour toute classe de conjugaison C, $|C \cap H| = |C \cap H'|$.

Si K corps de nombres galoisien de groupe de Galois G, alors

$$\zeta_{K^H}(s) = L(\mathbb{C}[G/H], s).$$

Construction d'objets isospectraux

Triplets de Gassmann (1925) :
G groupe fini et H, H' sous-groupes tels que

$$\mathbb{C}[G/H] \cong \mathbb{C}[G/H'].$$

$\iff$ pour toute classe de conjugaison C, $|C \cap H| = |C \cap H'|$.

Si K corps de nombres galoisien de groupe de Galois G, alors

$$\zeta_{K^H}(s) = L(\mathbb{C}[G/H], s).$$

Sunada : si $X \to Y$ est un revêtement galoisien de groupe de Galois G, alors X/H et X/H' sont fortement isospectrales.

Exemple de triplet de Gassmann

$G = \mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_2)$ agissant sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_2)$.

$H =$ stabilisateur d'un point

$H' =$ stabilisateur d'une droite

Théorie des représentations

$$\mathbb{C}[G/H] \cong \mathbb{C}[G/H']$$
$$\iff \mathbb{Q}[G/H] \cong \mathbb{Q}[G/H']$$
$$\iff \mathbb{Q}_p[G/H] \cong \mathbb{Q}_p[G/H']$$
$$\Longleftarrow \mathbb{Z}_p[G/H] \cong \mathbb{Z}_p[G/H']$$

et $\iff$ si $p \nmid |G|$.

Isomorphisme en p

Proposition (P., Bartel)

Si $\mathbb{Z}_p[G/H] \cong \mathbb{Z}_p[G/H']$ *alors*

$$H_i(X/H, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p \cong H_i(X/H', \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p.$$

En particulier,

$$\left|H_i(X/H, \mathbb{Z})[p^\infty]\right| = \left|H_i(X/H', \mathbb{Z})[p^\infty]\right|.$$

Isomorphisme en p

Proposition (P., Bartel)

Si $\mathbb{Z}_p[G/H] \cong \mathbb{Z}_p[G/H']$ *alors*

$$H_i(X/H, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p \cong H_i(X/H', \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p.$$

En particulier,

$$\left|H_i(X/H, \mathbb{Z})[p^\infty]\right| = \left|H_i(X/H', \mathbb{Z})[p^\infty]\right|.$$

Démonstration.

On a

$$H_i(X/H, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Z}_p \cong H_i(X/H, \mathbb{Z}_p) \cong H_i(X/G, \mathbb{Z}_p[G/H]).$$

$\square$

Plus petit triplet de Gassmann

Théorème (de Smit)

Soit p un premier impair. Si G, H, H' est un triplet de Gassmann tel que

$$\mathbb{Z}_p[G/H] \not\cong \mathbb{Z}_p[G/H']$$

et $[G : H] \leq 2p + 2$, alors il existe un isomorphisme

$$G \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)/(\mathbb{F}_p^\times)^2$$

qui envoie H, H' sur

$$\begin{pmatrix} \square & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \square \end{pmatrix}.$$

Constantes de régulateurs

Régulateur : transcendant, dépend de l'exemple particulier, difficile.

Constante de régulateurs : rationelle, dépend seulement de la représentation, facile.

Constantes de régulateurs

Régulateur : transcendant, dépend de l'exemple particulier, difficile.

Constante de régulateurs : rationelle, dépend seulement de la représentation, facile.

G, H, H' triplet de Gassmann, ρ représentation de G sur $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ forme bilinéaire G-invariante non dégénérée sur $\rho \otimes \mathbb{C}$.

$$\mathcal{C}(\rho) = \frac{\det(\langle \cdot, \cdot \rangle | \rho^H / (\rho^H)_{tors})}{\det(\langle \cdot, \cdot \rangle | \rho^{H'} / (\rho^{H'})_{tors})} \in \mathbb{C}/(R^\times)^2.$$

Théorème (Dokchitser, Dokchitser)

$\mathcal{C}(\rho)$ est indépendante de la forme bilinéaire choisie.

Constantes de régulateurs

Régulateur : transcendant, dépend de l'exemple particulier, difficile.

Constante de régulateurs : rationelle, dépend seulement de la représentation, facile.

G, H, H' triplet de Gassmann, ρ représentation de G sur $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ forme bilinéaire G-invariante non dégénérée sur $\rho \otimes \mathbb{C}$.

$$\mathcal{C}(\rho) = \frac{\det(\langle\cdot,\cdot\rangle | \rho^H / (\rho^H)_{tors})}{\det(\langle\cdot,\cdot\rangle | \rho^{H'} / (\rho^{H'})_{tors})} \in R/(R^\times)^2.$$

Théorème (Dokchitser, Dokchitser)

$\mathcal{C}(\rho)$ est indépendante de la forme bilinéaire choisie.

Exemple des unités

$K/\mathbb{Q}$ galoisienne de groupe G. Soit G, H_1, H_2 un triplet de Gassmann. Soit $\rho = \mathbb{Z}_K^\times$ vu comme G-module. $K_i = K^{H_i}$. Alors

$$\mathcal{C}(\rho) = \frac{R_{K_1}}{R_{K_2}} = \frac{h_{K_2}}{h_{K_1}}.$$

Exemple de constantes de régulateurs

$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)/\square$, $H_+ = \begin{pmatrix} \square & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $H_- = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \square \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, $r : \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$.

$I = \mathrm{Ind}_B^G r$ irréductible, de dimension $p + 1$.

Exemple de constantes de régulateurs

$G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)/\square$, $H_+ = \begin{pmatrix} \square & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, $H_- = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & \square \end{pmatrix}$.

$B = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$, $r : \begin{pmatrix} a & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \mapsto \left(\frac{a}{p}\right)$.

$I = \mathrm{Ind}_B^G r$ irréductible, de dimension $p + 1$.

Proposition (P., Bartel)

Pour toute représentation irréductible ρ de G sur $\mathbb{Q}$, on a $\mathcal{C}(\rho) = 1 \mod (\mathbb{Q}^\times)^2$, à l'exception de $\mathcal{C}(I) = p \mod (\mathbb{Q}^\times)^2$.

Comparaison de régulateurs

Théorème (P., Bartel)

Soit $X \to Y$ revêtement galoisien de 3-variétés hyperboliques de groupe de Galois G. Soit G, H, H' un triplet de Gassmann et p premier. Supposons $|H^{ab}|$ et $|H'^{ab}|$ non divisibles par p. $\rho :=$ G-module $H_2(X, \mathbb{Z})$. Alors

$$v_p\left(\frac{R(X/H')}{R(X/H)}\right) = v_p(\mathcal{C}(\rho)).$$

Calculs

Bonne source de 3-variétés : les groupes kleinéens arithmétiques !

$h : \Gamma \to G$ surjective, $Y = \mathcal{H}^3/\Gamma$ et $X = \mathcal{H}^3/\ker h$,
$\Longrightarrow X \to Y$ est un revêtemen galoisien de groupe de Galois G.

Calculs

Bonne source de 3-variétés : les groupes kleinéens arithmétiques !

$h : \Gamma \to G$ surjective, $Y = \mathcal{H}^3/\Gamma$ et $X = \mathcal{H}^3/\ker h$,
$\Longrightarrow X \to Y$ est un revêtemen galoisien de groupe de Galois G.

$H_1(X/H, R) \cong H_1(h^{-1}(H), R) \cong H_1(\Gamma, R[G/H])$.

Exemple

$F = \mathbb{Q}(t)$ avec $t^4 - t^3 + 2t^2 - 1$.

$B = \left(\frac{-1,-1}{F}\right)$.

$\mathcal{O}$ un ordre d'Eichler dont le niveau est de norme 71.

Γ de covolume $27.75939054\ldots$, et admet une présentation avec 5 générateurs et 7 relations.

Nous avons trouvé un homomorphisme surjectif $\Gamma \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_7)$, permettant d'obtenir deux variétés isospectrales d'homologie

$$\mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z}/4 + \mathbb{Z}/4 + \mathbb{Z}/12 + \mathbb{Z}/12 + \mathbb{Z}/(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23), \text{ et}$$

$$\mathbb{Z}^3 + \mathbb{Z}/4 + \mathbb{Z}/4 + \mathbb{Z}/12 + \mathbb{Z}/(12 \cdot 7) + \mathbb{Z}/(2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23).$$

Questions ?

Merci !