

Algorithmes pour la topologie des variétés arithmétiques compactes et les ops de Hecke

(I)

jw/ Michael Lipnowski

§1 Intro

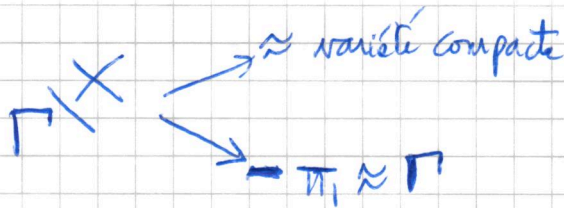
Un groupe arithmétique est un groupe $\Gamma = G(\mathbb{Z})$
où $G \subseteq \mathrm{SL}_n$ est un groupe algébrique. (semisimple)

ex: $\Gamma = \mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{SO}(Q, \mathbb{Z})$
↑ forme quadratique / \mathbb{Q} .

Γ généralement infini, mais de présentation finie (Boul, Harish-Chandra)

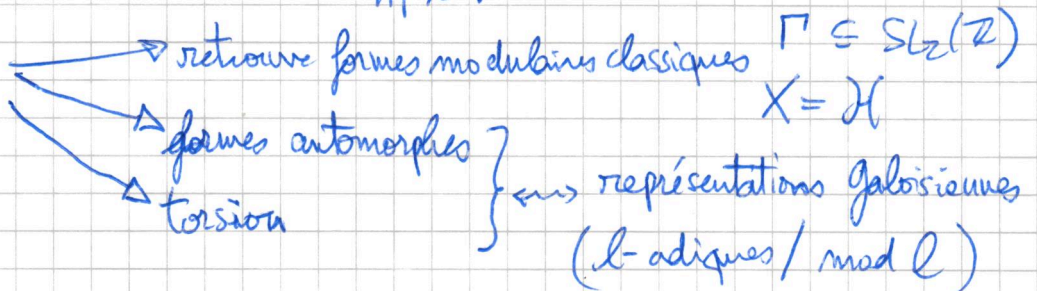
$\Gamma \curvearrowright X = G(\mathbb{R})/K$ $K \subseteq G(\mathbb{R})$ compact maximal
↑ contractile: "espace symétrique"

variété arithmétique



opérateurs de Hecke

$\rightarrow H^i(\Gamma \backslash X)$



Q: Étant donné G , peut-on calculer ces objets ?

À quelle vitesse ? Mesure de complexité: $V = \mathrm{vol}(\Gamma \backslash X)$.

Thm (Grunewald-Sigal '80) Il existe un algorithme qui,
Étant donné G , calcule une présentation pour Γ .

Complexité ?

~~Théorème de Lipnowski - P.~~

Thm (Lipnowski - P.)

Il existe un algorithme qui, étant donné G et t_g

- $\Gamma \backslash X$ est une variété compacte,

calcule

- un complexe simplicial $S \simeq \Gamma \backslash X$ (equiv. d'homotopie) avec $O_{\dim(V)}$ simplexes

- un isomorphisme explicite $\pi_1(S) \rightarrow \Gamma$

Cet algorithme termine en temps $O_{\dim(V^2)}$.

De plus, il existe un algorithme qui, étant donné une chaîne $\sigma \in C^0(S)$ et un opérateur de Hecke T , calcule une chaîne dans $C^0(S)$

qui est homologue à $\frac{T\sigma}{\sigma}$, en temps $O_{\dim(V \cdot \deg T)}$

$C^0(S)$



degré, mesure de complexité d'un opérateur de Hecke

Remarque: Le nombre de simplexes est essentiellement optimal.

§2 - Méthodes précédentes

dim 0 Q forme quadratique définie positive sur \mathbb{Q}^m .

$L_1 \subseteq \mathbb{Q}^m$ réseau.

$G = SO(Q)$

$\rho: G(\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut}(W)$ représentations de dim finie "poids".

$\tilde{X} = \text{genre}(L_1) = \{ L \subseteq \mathbb{Q}^m \text{ réseau tel que } (L, Q) \cong_{\mathbb{Z}} (L_1, Q) \forall p \}$

$M(W) := \{ f: \tilde{X} \rightarrow W \text{ tq } f(gx) = \rho(g)f(x) \forall g \in G(\mathbb{Q}), x \in \tilde{X} \}$

Thm $G(\mathbb{Q}) \backslash \tilde{X}$ est fini (variété arithmétique de dimension 0)

$\{ [L_1], [L_2], \dots, [L_V] \}$

$\Rightarrow M(W) \cong \bigoplus_{i=1}^V H^0(\Gamma_i, W)$ $\Gamma_i = SO(Q, L_i)$ (fini)

Problème Comment calculer $G(\mathbb{Q}) \backslash \tilde{X}$?

$x_0, x'_0 \in \tilde{X}, [x_0] = [x'_0]$?

L_0, L'_0 réseaux $\exists g \in G(\mathbb{Q}) \ gL_0 = L'_0$?

Algorithme (Plesken-Souvignier)

b_1, \dots, b_n base de L
 Q définie-positive $\Rightarrow g b_i \in$ ensemble fini calculable
 \rightarrow énumération

Voisins $p \times 2 \text{ disc}(L_1, \mathbb{Q})$

(IV)

L, L' sont p -voisins si $L/LNL' \cong L'/LNL' \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$\leadsto \tilde{X}$ dérivent un graphe \tilde{X}_p

Thm (Kneser) $G(\mathbb{Q}) \backslash \tilde{X}_p$ est connexe.

Algorithme Explorer \tilde{X}_p en partant de L_1 .

A chaque étape tester l'équivalence avec les sommets précédents.

Complexité $O_{\text{dim}}(V^2)$

Opérateurs de Hecke

$f \in M(W)$

$$T_p f(L) = \sum_{L' \in \text{Vois}_p(L)} f(L') \quad \deg T_p = \#\text{Vois}_p(L)$$

Algo évident, complexité $O_{\text{dim}}(V \cdot \deg T_p)$ par point.

$\text{dim} > 0$

~~Information géométrique sur $\Gamma \backslash X$~~

1) Information géométrique sur $\Gamma \backslash X$

2) Complexes de dimension finie calculant $H^0(\Gamma \backslash X)$ ~~Hecke~~

4) $\uparrow \downarrow$

3) Complexes de dimension infinie calculant $H^0(\Gamma \backslash X)$ \odot Hecke

Oralement: symboles modulaires, H^1 , Voronoï & sharbilies.

III - Méthode par recouvrement

(V)

Homologie de ΓX ?

Idee: Imiter les méthodes en dim 0, approximer ΓX par un ensemble fini.

Insérer $\mathcal{N} \subseteq \Gamma X \subset \mathcal{M}$

- $\bigcup_{x \in F} B_R(x) \subseteq \Gamma X \rightarrow B$ dense

Def $F \subseteq Y$ espace métrique, $R > 0$

- F R -dense si $Y = \bigcup_{x \in F} B_R(x)$
- F R -séparée si $d(x, y) \geq R \quad \forall x \neq y \in F$

Rq $F \subseteq Y$ R -~~isolée~~^{séparée} maximale $\Rightarrow F$ R -dense.

Def F espace métrique, $R > 0$

Complexe de ~~de~~ Geck $\mathcal{C}_R(F)$:

- sommets : points de F
- $\{x_0, \dots, x_k\}$ k -simplexe $\Leftrightarrow \bigcap_i B_R(x_i) \neq \emptyset$

Thm (~~de~~)

Y variété riemannienne compacte.

$F \subseteq Y$ R -dense avec $R \ll 1$.

Alors $\mathcal{C}_R(F) \simeq Y$ (équivalence d'homotopie)

Étapes

- 1) Géométrie : F fini R -dense + graphe de $2R$ -adjacence
- 2) Complexe fini : $\mathcal{C}_R(F)$
- 3) Complexe infini : $\mathcal{C}_R(\Gamma X) \hookrightarrow \text{Hecke}$.
- 4) Equivalence : $\mathcal{C}_R(\Gamma X) \rightarrow \mathcal{C}_{R'}(F) \cong \mathcal{C}_R(F)$.

Algorithme?

- 1) Rendre remarque effective.
- 2) Calcul dans le quotient

1) On veut une partie dense mais pas trop grosse -
 F' partie $R/2$ -dense \rightarrow enlever des éléments ?

Solution: $F \subseteq F'$ $R/2$ -séparée maximale

$$\Rightarrow F \text{ } R/2\text{-dense dans } F'$$

$$\Rightarrow F \text{ } R\text{-dense dans } \Gamma \backslash X.$$

Procédé d'expansion pour toujours garder F de taille raisonnable.

2) $x, y \in X$, $\exists \gamma \in \Gamma$ tq $d(x, \gamma y) \leq R$?

exemple $\Gamma = SL_n$ $X = \left\{ \begin{array}{l} \text{formes quadratiques définies-positives} \\ \text{sur } \mathbb{R}^n \end{array} \right\}$

$$Q, Q' \in X.$$

Observation: $\forall x \in \mathbb{R}^m \setminus 0$,

$$|\log Q(x) - \log Q'(x)| \leq d(Q, Q')$$

Si $\gamma \in \Gamma(\mathbb{Z})$ et $d(Q, \gamma Q') \leq R$ alors $\forall x \in \mathbb{Q}^m$

$$Q'(x) e^R \leq Q(\gamma x) \leq Q'(x) e^R$$

ie $\gamma: (\mathbb{Z}^m, Q) \rightarrow (\mathbb{Z}^m, Q')$ e^R -quasi-isométrie.

nombre fini de possibilités, énumération à la Plesken-Sourin.

ex:	dim X	nb pts finaux	nb pts intermédiaires	tps
	2	4	304	0.25 s.
	3	9	11952	26 s.
	4	21	180 600	1175 s.