Calcul de formes modulaires de Klein

Aurel Page
University of Warwick

9 décembre 2014

Clermont-Ferrand
Groupe de travail de théorie des nombres

Courbes elliptiques et formes automorphes

Comment produire une base de données de courbes elliptiques sur un corps de nombres F ?

Courbes elliptiques et formes automorphes

Comment produire une base de données de courbes elliptiques sur un corps de nombres F ?

Sur $\mathbb{Q}$:

1. Calculer les newforms rationnelles de poids 2
2. Trouver les courbes elliptiques correspondantes

Cette liste est complète d'après le théorème de modularité.

Courbes elliptiques et formes automorphes

Comment produire une base de données de courbes elliptiques sur un corps de nombres F ?

Sur un corps de nombres ?

1. Formes automorphes pour GL_2
2. Courbes elliptiques correspondantes (Cremona–Lingham, Masdeu–Guitart)

Courbes elliptiques et formes automorphes

Comment produire une base de données de courbes elliptiques sur un corps de nombres F ?

Sur un corps de nombres ?

1. Formes automorphes pour GL_2
2. Courbes elliptiques correspondantes (Cremona–Lingham, Masdeu–Guitart)

Où trouver des formes automorphes ?

Courbes elliptiques et formes automorphes

Comment produire une base de données de courbes elliptiques sur un corps de nombres F ?

Sur un corps de nombres ?

1. Formes automorphes pour GL_2
2. Courbes elliptiques correspondantes (Cremona–Lingham, Masdeu–Guitart)

Où trouver des formes automorphes ?
Dans la cohomologie des groupes arithmétiques !

Formule de Matsushima : Γ sous-groupe discret cocompact du groupe de Lie connexe G, E représentation de G.

$$H^i(\Gamma, E) \cong \bigoplus_{\pi \in \widehat{G}} \mathrm{Hom}(\pi, L^2(\Gamma \backslash G)) \otimes H^i(\mathfrak{g}, K; \pi \otimes E)$$

Formes automorphes pour GL_2

Où trouver des formes automorphes pour GL_2 ?

Formes automorphes pour GL_2

Où trouver des formes automorphes pour GL_2 ?

- $H^*(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_F), E)$

Formes automorphes pour GL_2

Où trouver des formes automorphes pour GL_2 ?

- $H^*(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_F), E)$
- Jacquet–Langlands : $H^*(\mathcal{O}^\times, E)$, $\mathcal{O}$ ordre dans une algèbre de quaternions

Formes automorphes pour GL_2

Où trouver des formes automorphes pour GL_2 ?

- $H^*(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_F), E)$
- Jacquet–Langlands : $H^*(\mathcal{O}^\times, E)$, $\mathcal{O}$ ordre dans une algèbre de quaternions

Cas kleinéen : $\mathcal{O}^\times \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $H^1(\mathcal{O}^\times, E)$

Formes automorphes pour GL_2

Où trouver des formes automorphes pour GL_2 ?

- $H^*(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_F), E)$
- Jacquet–Langlands : $H^*(\mathcal{O}^\times, E)$, $\mathcal{O}$ ordre dans une algèbre de quaternions

Cas kleinéen : $\mathcal{O}^\times \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $H^1(\mathcal{O}^\times, E)$
On appellera $H^i(\mathcal{O}^\times, E)$ un espace de formes modulaires de Klein.

Motivation pour le cas kleinéen

- Courbes elliptiques et variétés abéliennes de type GL_2 sur des corps de nombres non totalement réels.

Motivation pour le cas kleinéen

- Courbes elliptiques et variétés abéliennes de type GL_2 sur des corps de nombres non totalement réels.
- **Phénomène de la torsion** :
  - Bergeron–Venkatesh : la (co)homologie des groupes kleinéens arithmétiques a beaucoup de torsion.
  - Scholze : représentations galoisiennes attachées aux classes de torsion propres pour les opérateurs de Hecke.

Autres algorithmes pour GL_2

Autres algorithmes pour GL_2

- sur $\mathbb{Q}$: symboles modulaires

Autres algorithmes pour GL_2

- sur $\mathbb{Q}$: symboles modulaires
- sur $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$: symboles modulaires (Cremona et al.), cohomologie de groupes de Bianchi (Grunewald et al., Şengün), méthodes à la Voronoï (Yasaki)

Autres algorithmes pour GL_2

- sur $\mathbb{Q}$: symboles modulaires
- sur $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$: symboles modulaires (Cremona et al.), cohomologie de groupes de Bianchi (Grunewald et al., Şengün), méthodes à la Voronoï (Yasaki)
- sur F totalement réel : méthode définie (Dembélé–Donnelly), cohomologie de courbes de Shimura (Greenberg–Voight)

Autres algorithmes pour GL_2

- sur $\mathbb{Q}$: symboles modulaires
- sur $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$: symboles modulaires (Cremona et al.), cohomologie de groupes de Bianchi (Grunewald et al., Şengün), méthodes à la Voronoï (Yasaki)
- sur F totalement réel : méthode définie (Dembélé–Donnelly), cohomologie de courbes de Shimura (Greenberg–Voight)
- F cubique mixte ou quartique complexe : méthode à la Voronoï (Gunnells–Yasaki)

Autres algorithmes pour GL_2

- sur $\mathbb{Q}$: symboles modulaires
- sur $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$: symboles modulaires (Cremona et al.), cohomologie de groupes de Bianchi (Grunewald et al., Şengün), méthodes à la Voronoï (Yasaki)
- sur F totalement réel : méthode définie (Dembélé–Donnelly), cohomologie de courbes de Shimura (Greenberg–Voight)
- F cubique mixte ou quartique complexe : méthode à la Voronoï (Gunnells–Yasaki)
- F exactement une place complexe : cohomologie de groupes kleinéens arithmétiques

Groupes kleinéens arithmétiques

Groupes kleinéens

$\mathbb{H} := \mathbb{C} + \mathbb{C}j$ où $j^2 = -1$ et $jz = \overline{z}j$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le demi-espace supérieur $\mathcal{H}^3 := \mathbb{C} + \mathbb{R}_{>0}j$.
Métrique $\mathrm{d}s^2 = \frac{|\mathrm{d}z|^2 + \mathrm{d}t^2}{t^2}$, volume $\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^3}$.

Groupes kleinéens

$\mathbb{H} := \mathbb{C} + \mathbb{C}j$ où $j^2 = -1$ et $jz = \overline{z}j$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le demi-espace supérieur $\mathcal{H}^3 := \mathbb{C} + \mathbb{R}_{>0}j$.
Métrique $\mathrm{d}s^2 = \frac{|\mathrm{d}z|^2 + \mathrm{d}t^2}{t^2}$, volume $\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^3}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot w := (aw + b)(cw + d)^{-1} \text{ pour } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Groupes kleinéens

$\mathbb{H} := \mathbb{C} + \mathbb{C}j$ où $j^2 = -1$ et $jz = \overline{z}j$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Le demi-espace supérieur $\mathcal{H}^3 := \mathbb{C} + \mathbb{R}_{>0}j$.
Métrique $\mathrm{d}s^2 = \frac{|\mathrm{d}z|^2 + \mathrm{d}t^2}{t^2}$, volume $\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t}{t^3}$.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot w := (aw+b)(cw+d)^{-1} \text{ pour } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}).$$

Groupe kleinéen : sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.
Cofini s'il est de covolume fini.

Algèbres de quaternions

Une algèbre de quaternions B sur un corps F est une algèbre centrale simple de dimension 4 sur F.

Explicitement, $B = \left(\frac{a,b}{F}\right) = F + Fi + Fj + Fij$, $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji$ (char $F \neq 2$).

Algèbres de quaternions

Une algèbre de quaternions B sur un corps F est une algèbre centrale simple de dimension 4 sur F.

Explicitement, $B = \left(\frac{a,b}{F}\right) = F + Fi + Fj + Fij$, $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji$ (char $F \neq 2$).

Norme réduite : $\mathrm{nrd}(x + yi + zj + tij) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$.

Algèbres de quaternions

Une algèbre de quaternions B sur un corps F est une algèbre centrale simple de dimension 4 sur F.

Explicitement, $B = \left(\frac{a,b}{F}\right) = F + Fi + Fj + Fij$, $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji$ (char $F \neq 2$).

Norme réduite : $\mathrm{nrd}(x + yi + zj + tij) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$.

$\mathbb{Z}_F$ entiers du corps de nombres F.
Ordre $\mathcal{O} \subset B$: sous-anneau, $\mathbb{Z}_F$-module de type fini, $\mathcal{O}F = B$.

Algèbres de quaternions

Une algèbre de quaternions B sur un corps F est une algèbre centrale simple de dimension 4 sur F.

Explicitement, $B = \left(\frac{a,b}{F}\right) = F + Fi + Fj + Fij$, $i^2 = a$, $j^2 = b$, $ij = -ji$ (char $F \neq 2$).

Norme réduite : $\mathrm{nrd}(x + yi + zj + tij) = x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$.

$\mathbb{Z}_F$ entiers du corps de nombres F.
Ordre $\mathcal{O} \subset B$: sous-anneau, $\mathbb{Z}_F$-module de type fini, $\mathcal{O}F = B$.

Une place v de F est déployée ou ramifiée suivant que $B \otimes_F F_v$ est $\mathcal{M}_2(F_v)$ ou une algèbre à division.

Formule du covolume

F corps de nombres presque totalement réel : exactement une place complexe.

B/F algèbre de quaternion kleinéenne : ramifiée à toutes les places réelles.

Formule du covolume

F corps de nombres presque totalement réel : exactement une place complexe.

B/F algèbre de quaternion kleinéenne : ramifiée à toutes les places réelles.

$\mathcal{O}$ ordre dans B, Γ image du groupe $\mathcal{O}^1$ des unités de norme réduite 1 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Formule du covolume

F corps de nombres presque totalement réel : exactement une place complexe.

B/F algèbre de quaternion kleinéenne : ramifiée à toutes les places réelles.

$\mathcal{O}$ ordre dans B, Γ image du groupe $\mathcal{O}^1$ des unités de norme réduite 1 dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$.

Théorème

Γ est un groupe kleinéen cofini.
Il est cocompact ssi B est une algèbre à division.
Si $\mathcal{O}$ est maximal alors

$$\mathrm{Covol}(\Gamma) = \frac{|\Delta_F|^{3/2}\zeta_F(2)\prod_{\mathfrak{p}\ \mathit{ram.}}(N(\mathfrak{p})-1)}{(4\pi^2)^{[F:\mathbb{Q}]-1}}.$$

Algorithmes

Schéma de l'algorithme

1. Calculer B et $\mathcal{O}$

Schéma de l'algorithme

1. Calculer B et $\mathcal{O}$
2. Calculer $\mathcal{O}^1$

Schéma de l'algorithme

1. Calculer B et $\mathcal{O}$
2. Calculer $\mathcal{O}^1$
3. Calculer $H^1(\mathcal{O}^1)$

Schéma de l'algorithme

1. Calculer B et $\mathcal{O}$
2. Calculer $\mathcal{O}^1$
3. Calculer $H^1(\mathcal{O}^1)$
4. Calculer un idéal $I \subset \mathcal{O}$ de norme $\mathfrak{p}$

Schéma de l'algorithme

Pour simplifier, supposons que $\mathrm{Cl}_+(F) = 1$.

1. Calculer B et $\mathcal{O}$
2. Calculer $\mathcal{O}^1$
3. Calculer $H^1(\mathcal{O}^1)$
4. Calculer un idéal $I \subset \mathcal{O}$ de norme $\mathfrak{p}$
5. Calculer un générateur δ de I

Schéma de l'algorithme

Pour simplifier, supposons que $\mathrm{Cl}_+(F) = 1$.

1. Calculer B et $\mathcal{O}$
2. Calculer $\mathcal{O}^1$
3. Calculer $H^1(\mathcal{O}^1)$
4. Calculer un idéal $I \subset \mathcal{O}$ de norme $\mathfrak{p}$
5. Calculer un générateur δ de I
6. Calculer l'opérateur de Hecke T_δ sur $H^1(\mathcal{O}^1)$

Domaines fondamentaux

Γ un groupe kleinéen. Un ouvert $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}^3$ est un domaine fondamental si

- $\Gamma \cdot \overline{\mathcal{F}} = \mathcal{H}^3$
- $\mathcal{F} \cap \gamma\mathcal{F} = \emptyset$ pour tout $1 \neq \gamma \in \Gamma$.

Domaines de Dirichlet

Domaines de Dirichlet

Soit $p \in \mathcal{H}^3$ ayant un stabilisateur trivial dans Γ. Le domaine de Dirichlet

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &:= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\} \\ &= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(x, \gamma^{-1} \cdot p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\}. \end{aligned}$$

Domaines de Dirichlet

Soit $p \in \mathcal{H}^3$ ayant un stabilisateur trivial dans Γ. Le domaine de Dirichlet

$$\begin{aligned} D_p(\Gamma) &:= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(\gamma \cdot x, p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\} \\ &= \{x \in X \mid \mathrm{d}(x,p) < \mathrm{d}(x, \gamma^{-1} \cdot p)\ \forall \gamma \in \Gamma \setminus \{1\}\}. \end{aligned}$$

est un domaine fondamental pour Γ qui est un polyèdre hyperbolique. Si Γ est cofini, $D_p(\Gamma)$ a un nombre fini de faces.

Structure du domaine de Dirichlet

Structure du domaine de Dirichlet

- Les faces du domaine de Dirichlet sont groupées en paires, correspondant à des éléments $g, g^{-1} \in \Gamma$;

Structure du domaine de Dirichlet

- Les faces du domaine de Dirichlet sont groupées en paires, correspondant à des éléments $g, g^{-1} \in \Gamma$;
- Les arêtes du domaine sont groupées en cycles, le produit des éléments correspondants dans Γ est d'ordre fini.

Théorème de Poincaré

Théorème (Poincaré)

- *Les éléments correspondant aux faces sont des générateurs de Γ. Les relations correspondant aux cycles d'arêtes engendrent toutes les relations entre ces générateurs.*

Théorème de Poincaré

Théorème (Poincaré)

- *Les éléments correspondant aux faces sont des générateurs de Γ. Les relations correspondant aux cycles d'arêtes engendrent toutes les relations entre ces générateurs.*
- *Si un domaine de Dirichlet partiel $D_p(S)$ possède un couplage des faces et des cycles d'arêtes, alors c'est un domaine fondamental pour le groupe engendré par S.*

Algorithme de réduction

$x \in \mathcal{H}^3$, $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$.

Algorithme de réduction

$x \in \mathcal{H}^3$, $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$.

- si possible $x \leftarrow gx$ pour un $g \in S$ tel que $\mathrm{d}(x, p)$ diminue strictement

Algorithme de réduction

$x \in \mathcal{H}^3$, $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$.

- si possible $x \leftarrow gx$ pour un $g \in S$ tel que $\mathrm{d}(x, p)$ diminue strictement
- répéter

Algorithme de réduction

$x \in \mathcal{H}^3$, $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$.

- si possible $x \leftarrow gx$ pour un $g \in S$ tel que $\mathrm{d}(x, p)$ diminue strictement
- répéter

$\rightarrow$ point $x' = g_k \cdots g_1 x$ tel que $x' \in D_p(\Gamma)$.

Algorithme de réduction

$x \in \mathcal{H}^3$, $S \subset \Gamma$ correspondant aux faces de $D_p(\Gamma)$.

- si possible $x \leftarrow gx$ pour un $g \in S$ tel que $\mathrm{d}(x, p)$ diminue strictement
- répéter

$\rightarrow$ point $x' = g_k \cdots g_1 x$ tel que $x' \in D_p(\Gamma)$.

En particulier, pour $\gamma \in \Gamma$, prendre $x = \gamma^{-1} p$ qui se réduit en $x' = p$, et écrire ainsi γ comme produit des générateurs.

Calculs dans l'espace hyperbolique

Calculs dans l'espace hyperbolique

On dispose de :

- une formule explicite pour la distance hyperbolique ;

Calculs dans l'espace hyperbolique

On dispose de :

- une formule explicite pour la distance hyperbolique ;
- une formule explicite pour les bisecteurs ;

Calculs dans l'espace hyperbolique

On dispose de :

- une formule explicite pour la distance hyperbolique ;
- une formule explicite pour les bisecteurs ;
- un algorithme pour calculer l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces ;

Calculs dans l'espace hyperbolique

On dispose de :

- une formule explicite pour la distance hyperbolique ;
- une formule explicite pour les bisecteurs ;
- un algorithme pour calculer l'intersection d'un ensemble fini de demi-espaces ;
- un algorithme pour calculer le volume d'un polyèdre hyperbolique.

Algorithme

Supposons $\mathcal{O}$ maximal. Choisir une borne $X > 0$.

Algorithme

Supposons $\mathcal{O}$ maximal. Choisir une borne $X > 0$.

- $S \leftarrow$ éléments de $\mathcal{O}^1$ de taille $\leq X$

Algorithme

Supposons $\mathcal{O}$ maximal. Choisir une borne $X > 0$.

- $S \leftarrow$ éléments de $\mathcal{O}^1$ de taille $\leq X$
- Calculer $D = D_p(S)$

Algorithme

Supposons $\mathcal{O}$ maximal. Choisir une borne $X > 0$.

- $S \leftarrow$ éléments de $\mathcal{O}^1$ de taille $\leq X$
- Calculer $D = D_p(S)$
- Augmenter X et répéter jusqu'à pouvoir appliquer le théorème de Poincaré avec $\mathrm{Vol}(D) < 2\,\mathrm{Covol}(\Gamma)$

Complexité

Pourquoi se préoccuper de la complexité ?

Complexité

- Complexité prouvée
- Complexité observée
- Borne inférieure

Complexité

- Complexité prouvée : $\mathrm{Covol}(\Gamma)^{O(1)}$

  Il suffit de borner la taille du domaine de Dirichlet

  Action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sur $\pi = L^2_0(\Gamma \backslash \mathrm{SL}_2(\mathbb{C}))$ possède la propriété (τ) :
  Il existe $Q \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ compact et $\epsilon > 0$ explicites tels que pour tout $f \in \pi$, il existe $g \in Q$ tel que $\|gf - f\| \geq \epsilon \|f\|$.

  $\Rightarrow \mathrm{diam}(D_p(\Gamma)) \ll \log \mathrm{Covol}(\Gamma)$
- Complexité observée
- Borne inférieure

Complexité

- Complexité prouvée : $\mathrm{Covol}(\Gamma)^{O(1)}$
- Complexité observée : $\mathrm{Covol}(\Gamma)^2$
  Nombre de faces proportionnel au volume
  $+$ algorithmes géométriques quadratiques
- Borne inférieure

Complexité

- Complexité prouvée : $\mathrm{Covol}(\Gamma)^{O(1)}$
- Complexité observée : $\mathrm{Covol}(\Gamma)^2$
- Borne inférieure : $\mathrm{Covol}(\Gamma)$
  Le volume d'un tétraèdre hyperbolique est borné supérieurement
  $\Longrightarrow$ le nombre de faces est au moins proportionnel au volume

Complexité

- Complexité prouvée : $\mathrm{Covol}(\Gamma)^{O(1)}$
- Complexité observée : $\mathrm{Covol}(\Gamma)^2$
- Borne inférieure : $\mathrm{Covol}(\Gamma)$

Cohomologie des groupes

Cohomologie des groupes

Cocycles :

$$Z^1(\Gamma, E) := \{\phi : \Gamma \to E \mid \phi(gh) = \phi(g) + g \cdot \phi(h) \ \forall g, h \in \Gamma\}$$

Cohomologie des groupes

Cocycles :

$$Z^1(\Gamma, E) := \{\phi : \Gamma \to E \mid \phi(gh) = \phi(g) + g \cdot \phi(h)\ \forall g, h \in \Gamma\}$$

Cobords :

$$B^1(\Gamma, E) := \{\phi_x : g \mapsto x - g \cdot x : \ x \in E\} \subset Z^1(\Gamma, E)$$

Cohomologie des groupes

Cocycles :

$$Z^1(\Gamma, E) := \{\phi : \Gamma \to E \mid \phi(gh) = \phi(g) + g \cdot \phi(h)\ \forall g, h \in \Gamma\}$$

Cobords :

$$B^1(\Gamma, E) := \{\phi_x : g \mapsto x - g \cdot x :\ x \in E\} \subset Z^1(\Gamma, E)$$

Cohomologie :

$$H^1(\Gamma, E) := Z^1(\Gamma, E)/B^1(\Gamma, E)$$

Opérateurs de Hecke

Soit $\delta \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$.

$$H^i(\Gamma, M)$$

Opérateurs de Hecke

Soit $\delta \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$.

$$\begin{array}{c} H^i(\Gamma, M) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}} \\ H^i(\Gamma \cap \delta\Gamma\delta^{-1}, M) \end{array}$$

Opérateurs de Hecke

Soit $\delta \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$.

$$\begin{tikzcd}
H^i(\Gamma, M) \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & \\
H^i(\Gamma \cap \delta\Gamma\delta^{-1}, M) \arrow[r, "\tilde{\delta}"'] & H^i(\delta^{-1}\Gamma\delta \cap \Gamma, M)
\end{tikzcd}$$

Opérateurs de Hecke

Soit $\delta \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$.

$$\begin{tikzcd}
H^i(\Gamma, M) \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & H^i(\Gamma, M) \\
H^i(\Gamma \cap \delta\Gamma\delta^{-1}, M) \arrow[r, "\tilde{\delta}"'] & H^i(\delta^{-1}\Gamma\delta \cap \Gamma, M) \arrow[u, "\mathrm{Cores}"']
\end{tikzcd}$$

Opérateurs de Hecke

Soit $\delta \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$.

$$
\begin{tikzcd}
H^i(\Gamma, M) \arrow[r, "T_\delta"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"'] & H^i(\Gamma, M) \\
H^i(\Gamma \cap \delta\Gamma\delta^{-1}, M) \arrow[r, "\tilde{\delta}"'] & H^i(\delta^{-1}\Gamma\delta \cap \Gamma, M) \arrow[u, "\mathrm{Cores}"']
\end{tikzcd}
$$

Problème de l'idéal principal

Rappel : on doit trouver un générateur δ d'un idéal de norme $\mathfrak{p} = (\pi)$.

Problème de l'idéal principal

Rappel : on doit trouver un générateur δ d'un idéal de norme $\mathfrak{p} = (\pi)$.

Recherche exhaustive dans $\{\mathrm{nrd} = \pi\}/\mathcal{O}^1$: complexité $\Delta_B^{O(1)}$.

Problème de l'idéal principal

Rappel : on doit trouver un générateur δ d'un idéal de norme $\mathfrak{p} = (\pi)$.

Recherche exhaustive dans $\{\mathrm{nrd} = \pi\}/\mathcal{O}^1$: complexité $\Delta_B^{O(1)}$.

Dans les corps de nombres, algorithme de Buchmann : sous-exponentiel sous GRH.

Problème de l'idéal principal

Rappel : on doit trouver un générateur δ d'un idéal de norme $\mathfrak{p} = (\pi)$.

Recherche exhaustive dans $\{\mathrm{nrd} = \pi\}/\mathcal{O}^1$: complexité $\Delta_B^{O(1)}$.

Dans les corps de nombres, algorithme de Buchmann : sous-exponentiel sous GRH.

Adaptation de l'algorithme de Buchmann pour une algèbre de quaternions : heuristiquement sous-exponentiel, efficace en pratique.

Exemples

Un exemple quartique

Soit G l'unique corps quartique de signature $(2,1)$ et de discriminant -275.

Soit B l'unique algèbre de quaternions de discriminant $11\mathbb{Z}_F$, ramifiée à toutes les places réelles de F.

Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal dans B (unique à conjugaison près). Alors $\mathcal{O}^1/\{\pm 1\}$ est un groupe kleinéen de covolume $93.72\ldots$ Le domaine fondamental calculé possède 310 faces et 924 arêtes.

Un exemple quartique

Soit G l'unique corps quartique de signature $(2, 1)$ et de discriminant -275.

Soit B l'unique algèbre de quaternions de discriminant $11\mathbb{Z}_F$, ramifiée à toutes les places réelles de F.

Soit $\mathcal{O}$ un ordre maximal dans B (unique à conjugaison près). Alors $\mathcal{O}^1/\{\pm 1\}$ est un groupe kleinéen de covolume $93.72\ldots$ Le domaine fondamental calculé possède 310 faces et 924 arêtes.

Jetez un coup d'œil au domaine fondamental !

Un exemple quartique

$N(\mathfrak{p})$	$T_{\mathfrak{p}}$	polynôme caractéristique
9	$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$	$(x+5)(x^2-5x-2)$
9	idem	$(x+5)(x^2-5x-2)$
16	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -11 \\ 2 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$	$(x+8)(x^2-x-8)$
19	$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$x(x+4)^2$
19	idem	$x(x+4)^2$
25	—	$(x+9)(x^2-x-74)$
29	—	$x(x^2+6x-24)$
29	—	$x(x^2+6x-24)$

Changement de base

Groupes de Bianchi : $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$ avec $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.

Changement de base

Groupes de Bianchi : $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$ avec $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
Finis, Grunewald, Tirao : formule pour la dimension du sous-espace des changements de base dans $H^i(\Gamma, E_k)$.
Remarque : très peu de classes non changements de base.

Changement de base

Groupes de Bianchi : $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$ avec $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
Finis, Grunewald, Tirao : formule pour la dimension du sous-espace des changements de base dans $H^i(\Gamma, E_k)$.
Remarque : très peu de classes non changements de base.
Şengün, Rahm : extension de leurs calculs.

Changement de base

Groupes de Bianchi : $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$ avec $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
Finis, Grunewald, Tirao : formule pour la dimension du sous-espace des changements de base dans $H^i(\Gamma, E_k)$.
Remarque : très peu de classes non changements de base.
Şengün, Rahm : extension de leurs calculs.

Question (Conjecture de Maeda modifiée)

Est-ce que l'ensemble des newforms dans $H^i(\Gamma, E_k)$ non relevées, modulo jumelage, forment une seule orbite galoisienne ? Est-ce vrai pour $k \gg 0$?

Changement de base

Groupes de Bianchi : $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$ avec $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
Finis, Grunewald, Tirao : formule pour la dimension du sous-espace des changements de base dans $H^i(\Gamma, E_k)$.
Remarque : très peu de classes non changements de base.
Şengün, Rahm : extension de leurs calculs.

Question (Conjecture de Maeda modifiée)

Est-ce que l'ensemble des newforms dans $H^i(\Gamma, E_k)$ non relevées, modulo jumelage, forment une seule orbite galoisienne ? Est-ce vrai pour $k \gg 0$?

Données expérimentales : toujours de dimension 0 ou 2, sauf pour $(d, k) = (-199, 2)$: dimension 4.

Changement de base

Groupes de Bianchi : $\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}_F)$ avec $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$.
Finis, Grunewald, Tirao : formule pour la dimension du sous-espace des changements de base dans $H^i(\Gamma, E_k)$.
Remarque : très peu de classes non changements de base.
Şengün, Rahm : extension de leurs calculs.

Question (Conjecture de Maeda modifiée)

Est-ce que l'ensemble des newforms dans $H^i(\Gamma, E_k)$ non relevées, modulo jumelage, forment une seule orbite galoisienne ? Est-ce vrai pour $k \gg 0$?

Données expérimentales : toujours de dimension 0 ou 2, sauf pour $(d, k) = (-199, 2)$: dimension 4.
Deux orbites galoisiennes jumelles avec des valeurs propres dans $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$, échangées par $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$.

Surfaces abéliennes avec partout bonne réduction

Groupe de Bianchi pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-223})$.

Surfaces abéliennes avec partout bonne réduction

Groupe de Bianchi pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-223})$.
Jetez un coup d'œil au domaine fondamental !

Surfaces abéliennes avec partout bonne réduction

Groupe de Bianchi pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-223})$.

Sous-espace parabolique de $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$: dimension 2, une orbite galoisienne à valeurs propres dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Surfaces abéliennes avec partout bonne réduction

Groupe de Bianchi pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-223})$.

Sous-espace parabolique de $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$: dimension 2, une orbite galoisienne à valeurs propres dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Şengün, Dembélé : la Jacobienne J de la courbe hyperelliptique

$$\begin{aligned} y^2 &= 33x^6 + 110\sqrt{-223}x^5 + 36187x^4 - 28402\sqrt{-223}x^3 \\ &\quad -2788739x^2 + 652936\sqrt{-223}x + 14157596 \end{aligned}$$

a partout bonne réduction, $\mathrm{End}(J) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et les polynômes caractéristiques des Frobénius correspondent aux valeurs propres de Hecke.

Surfaces abéliennes avec partout bonne réduction

Groupe de Bianchi pour $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-223})$.

Sous-espace parabolique de $H^1(\Gamma, \mathbb{C})$: dimension 2, une orbite galoisienne à valeurs propres dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Şengün, Dembélé : la Jacobienne J de la courbe hyperelliptique

$$\begin{aligned} y^2 &= 33x^6 + 110\sqrt{-223}x^5 + 36187x^4 - 28402\sqrt{-223}x^3 \\ &\quad -2788739x^2 + 652936\sqrt{-223}x + 14157596 \end{aligned}$$

a partout bonne réduction, $\mathrm{End}(J) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et les polynômes caractéristiques des Frobénius correspondent aux valeurs propres de Hecke.

En cours : recherche de nouveaux exemples sur $\mathbb{Q}(\sqrt{-455})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{-571})$.

Jacquet-Langlands pour la torsion

On peut également considérer $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}$ et $H_1(\Gamma, \mathbb{F}_p)$.

Jacquet-Langlands pour la torsion

On peut également considérer $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}$ et $H_1(\Gamma, \mathbb{F}_p)$.

Jacquet–Langlands : lien entre la (co)homologie de $\Gamma_0(\mathfrak{N})$ dans un groupe de Bianchi et celle de Γ provenant d'une algèbre de quaternions de discriminant $\mathfrak{N}$.

Jacquet-Langlands pour la torsion

On peut également considérer $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}$ et $H_1(\Gamma, \mathbb{F}_p)$.

Jacquet–Langlands : lien entre la (co)homologie de $\Gamma_0(\mathfrak{N})$ dans un groupe de Bianchi et celle de Γ provenant d'une algèbre de quaternions de discriminant $\mathfrak{N}$.

Calegari, Venkatesh : correspondance de Jacquet-Langlands numérique pour la torsion.

Jacquet-Langlands pour la torsion

On peut également considérer $H_1(\Gamma, \mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}$ et $H_1(\Gamma, \mathbb{F}_p)$.

Jacquet–Langlands : lien entre la (co)homologie de $\Gamma_0(\mathfrak{N})$ dans un groupe de Bianchi et celle de Γ provenant d'une algèbre de quaternions de discriminant $\mathfrak{N}$.

Calegari, Venkatesh : correspondance de Jacquet-Langlands numérique pour la torsion.

En cours avec H. Şengün : vérification expérimentale avec les opérateurs de Hecke.

Merci de votre attention !