Torsion dans l'homologie des variétés isospectrales de Vignéras et opérateurs de Hecke

avec Alex Bartel

I) Intro

Mark Kac '60 "Can you hear the shape of a drum?"

• vibrations $\longrightarrow$ opérateur de Laplace Δ, spectre discret.

Définition Deux variétés riemanniennes sont isospectrales si elles ont le même spectre avec multiplicité pour Δ agissant sur les k-formes différentielles pour tout k.

Question : $\exists$ variétés isospectrales non isométriques ?

Réponse : oui en toute dim ≥ 2 Vignéras '70 Sunada '80.

Analogie avec les corps de nombres :

Définition : Corps de nombres K, K' sont ~~[illegible]~~ arithmétiquement équivalents si $\zeta_K = \zeta_{K'}$.

Question : $\exists$ corps a.e. non isomorphes ?

Réponce : oui (Gassmann '20)

$\boxed{\text{* commencer tableau de comparaison ici}}$

Raffinement : quels invariants sont isospectraux ?

(i.e. automatiquement les mêmes pour des variétés isospectrales)

Questions :

- $H_k(M)_{tors}$?
- $Reg_k(M)$?

(degré | dimension)

invariant a.e.?	K	M	invariant isospectral ?
OUI (def)	$\zeta_K(s) = \sum_{\mathfrak{a}} N(\mathfrak{a})^{-s}$	$\zeta_{M,k}(s) = \sum_{\lambda \text{ v.p. } \Delta \circlearrowleft \Omega^k(M)} \lambda^{-s}$, $\lambda \neq 0$	OUI (def)
OUI	$\lvert \mathrm{disc}(K) \rvert = \mathrm{vol}\left(\frac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}_K}\right)$	$\mathrm{vol}(M) = \mathrm{Reg}_0(M)^2$	OUI
OUI	signature (r_1, r_2), rang unités $\mathbb{Z}_K^\times$	nombres de Betti $b_k = \mathrm{rk}\, H_k(M)$	OUI
OUI	racines de l'unité	(orientabilité)	OUI
	formule analytique du nombre de classes	Cheeger–Mueller	
	$\mathrm{res}_{s=1}\, \zeta_K(s)$	$\prod_k \zeta'_{M,k}(0)^{k(-1)^k}$	
NON	$\mathrm{Reg}(K) = \mathrm{vol}\left(\mathbb{R}^{r_1+r_2-1} / \mathbb{Z}_K^\times\right)$	$\mathrm{Reg}_k(M) = \mathrm{vol}\left(\frac{H_k(M,\mathbb{R})}{H_k(M)}\right)$	? NON
NON	$\mathcal{C}\ell(K)$	$H_k(M)_{tors}$	? NON
OUI	$\mathrm{Reg}(K) \cdot \#\mathcal{C}\ell(K)$	$\prod_k \left(\frac{\mathrm{Reg}_k(M)}{\#H_k(M)_{tors}}\right)^{(-1)^k}$	OUI

	Gassmann	Sunada	Vignéras
	groupe fini G		algèbre de quaternions
mauvais premiers	$p \mid \#G$		?

II) Construction de Vignéras

K corps de nombres

A algèbre de quaternions : $A = K + Ki + Kj + Kij = \left(\frac{a,b}{K}\right)$

$i^2 = a \in K^\times \quad j^2 = b \in K^2 \quad ij = -ji$.

ordre $\mathcal{O} \subseteq A$: sous-$\mathbb{Z}_K$-module de type fini, sous-anneau, $\mathcal{O} \cdot K = A$.

ex : si $a, b \in \mathbb{Z}_K$ $\quad \mathcal{O} = \mathbb{Z}_K + \mathbb{Z}_K i + \mathbb{Z}_K j + \mathbb{Z}_K ij$.

ordre maximal : analogue de l'anneau des entiers d'un corps de nombres mais

- pas unique $\mathcal{O} \longrightarrow x \mathcal{O} x^{-1}$
- nombre fini à conjugaison près.

$\mathfrak{p}$ premier de $\mathbb{Z}_K$

$$\mathcal{O}/\mathfrak{p}\mathcal{O} \cong \begin{cases} M_2(\mathbb{Z}_K/\mathfrak{p}) & : \mathfrak{p} \text{ non ramifié} \\ \mathfrak{p} \text{ ramifié} & \longleftarrow \text{nombre fini} \end{cases}$$

(ne dépend pas du choix de $\mathcal{O}$)

σ plongement réel de K :

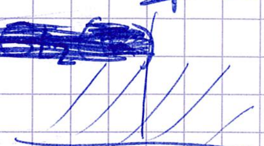
$$A \otimes_\sigma \mathbb{R} \cong \begin{cases} M_2(\mathbb{R}) & : \sigma \text{ non ramifié} \\ \left(\frac{-1,-1}{\mathbb{R}}\right) & : \sigma \text{ ramifié} \end{cases}$$

σ complexe : $A \otimes_\sigma \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$.

Hypothèse pour simplifier : A ramifiée à toutes les places réelles.

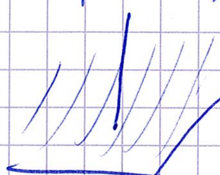
On construit.

$\Gamma(\mathcal{O}) =$ image de $\mathcal{O}^\times$ dans $GL_2(\mathbb{C})^{r_2}$



$SL_2(\mathbb{R}) \circlearrowright \mathcal{H} = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\, z > 0 \}$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$.



$GL_2(\mathbb{C}) \circlearrowright \mathcal{H}_3$ dim 3.

$M = \Gamma(\mathcal{O}) \backslash \mathcal{H}_3^{r_2}$ de volume fini, compacte si $A \not\cong M_2(K)$
"variété" (orbifold) $\iff \exists$ place ramifiée

<u>Thm</u> (Vignéras) (Maclachlan - Rosenberger)

Si $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ sont des ordres maximaux, non-sélectifs,
alors $M = \Gamma(\mathcal{O}) \backslash \mathcal{H}_3^{r_2}$ et $M' = \Gamma(\mathcal{O}') \backslash \mathcal{H}_3^{r_2}$
sont isospectrales.

Problème "sélectivité" : L/K quad. $L \hookrightarrow A$. $\mathbb{Z}_L \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{O}$, $\mathbb{Z}_L \overset{?}{\hookrightarrow} \mathcal{O}'$.

On peut trouver des exemples avec $H_k(M)_{tors}$ qui diffèrent.

<u>Question</u> : peut-on caractériser les bons/mauvais premiers ?

$\hookrightarrow$ nécessairement identique en p. tors/rég.

<u>Exemple</u> : $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ $\alpha^5 - 2\alpha^4 - 4\alpha^3 + 8\alpha^2 + 3\alpha - 5 = 0$ $r_1 = 3$ $r_2 = 1$.

A ramifiée en $\mathfrak{p}_7$ et places réelles $i^2 = -4$ $j^2 = -24\alpha^4 - 12\alpha^3 + 80\alpha^2 + 24\alpha - 71$

$\mathcal{O}, \mathcal{O}'$ maximaux non conjugués.

IV

$\dim M = \dim M' = 3$. $\quad \mathrm{vol}(M) = \mathrm{vol}(M') \approx 22.876\ldots$

H_0	H_1	H_2	H_3
$\mathbb{Z}$	$\mathrm{tors} \oplus \mathbb{Z}^{b_1}$	$\mathbb{Z}^{b_1}$	$\mathbb{Z}$

$$\# H_1(M)_{\mathrm{tors}} \cdot \mathrm{Reg}_2(M)^2 = \# H_1(M')_{\mathrm{tors}} \cdot \mathrm{Reg}_2(M')^2$$

ici $H_1(M) \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/88 \oplus \mathbb{Z}$

$H_1(M') \cong \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/8 \oplus \mathbb{Z}$

Hecke $\circlearrowright H_1(M) \oplus H_1(M')$

corps des valeurs propres : $\mathbb{Q}(\sqrt{11})$.

III) Résultats

Rappel : caractères de Hecke

$$\psi : \mathcal{C}\ell(K, \mathfrak{m}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$

Plus généralement $\psi : \mathbb{A}_K^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times$ d'ordre fini ou infini. conducteur.

$\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{R} \quad \psi_\sigma : \mathbb{R}^\times \to \mathbb{C}^\times$

$x \longmapsto \mathrm{sgn}(x)^m |x|^{i\varphi} \quad m \in \{0,1\} \quad \varphi \in \mathbb{R}$

$\sigma : K \hookrightarrow \mathbb{C} \quad \psi_\sigma : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$

$z \longmapsto \left(\frac{z}{|z|}\right)^m |z|^{2i\varphi} \quad m \in \mathbb{Z} \quad \varphi \in \mathbb{R}$.

ordre fini si $\varphi = 0$, et $m = 0$ aux places complexes.

~~Hypothèse pour~~ $C = \mathcal{C}\ell_+(K) / \langle \mathcal{C}\ell_+(K)^2, \mathfrak{p} \text{ ramifiés dans } A \rangle$

paramétrise les ordres maximaux à conj. près.

Hypothèse pour simplifier: $C \cong C_2$ et $r_2 = 1$. $(\dim = 3)$. $C \leftrightarrow L/K$ quad.

Thm (Bartel, P.)

M et M' sont isospectrales, sauf si ~~tous les~~ aucun premiers ~~ont~~ ne ramifie dans A et L/K est totalement complexe.

$\Omega^k(M)_{\Delta=\lambda} \cong \Omega^k(M')_{\Delta=\lambda}$, sauf s'il existe un caractère de Hecke ψ de L de conducteur 1 et $(\ldots k, \lambda)$.

Thm (Bartel, P.)

$\left(\frac{Reg_k(M)}{Reg_k(M')}\right)^2 \in \mathbb{Q}$, sauf si A est non ramifiée à tous les premiers, L/K est tot complexe, et $\exists$ un caractère de Hecke Ψ de L de conducteur 1 tq

- $m = \pm 1$ $\varphi = 0$ σ réel de $K \to \sigma$ complexe de L
- $m_1 = -m_2 = \pm 1$ $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ σ complexe de $K \to \sigma_1, \sigma_2$ complexes de L.

Thm (Bartel, P.)

$p > 2$. + conjectures "standard" sur les représentations galoisiennes attachées

$v_p\left(\frac{Reg_k(M)}{Reg_k(M')}\right) = 0$ et $H_k(M)[p^\infty] \cong H_k(M')[p^\infty]$, sauf si

L/K est tot. complexe, et $\exists \Psi : Cl(L, p) \to \mathbb{F}_p^\times$ + conditions.

IV) Idées des preuves

- opérateurs de Hecke :

$$\begin{array}{ccccc} M & \rightleftarrows & M' & \mathfrak{q} \neq 0 \text{ dans } C & \mathbb{T}_1 \\ \circlearrowleft & T_\mathfrak{q} & \circlearrowleft & & \\ T_\mathfrak{p} & & T_\mathfrak{p} & \mathfrak{p} = 0 \text{ dans } C & : \mathbb{T}_0 \end{array} \qquad \mathbb{T} = \mathbb{T}_0 \oplus \mathbb{T} \circlearrowright M \sqcup M'.$$

- tous les isomorphismes qu'on montre viennent d'un opérateur de Hecke inversible dans $\mathbb{T}_1$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{T} & V' \\ \langle,\rangle \downarrow & & \downarrow \langle,\rangle \\ V^* & \xrightarrow[T^*]{} & (V')^* \end{array} \Rightarrow \left(\frac{Reg'}{Reg}\right)^2 = \frac{\det T^*}{\det T}.$$

- inversible ? dévissage $\Rightarrow$ on peut supposer $\mathbb{T}_0 =$ corps.
- $t \in \mathbb{T}_1 \Rightarrow t^2 \in \mathbb{T}_0$ + $\mathbb{T}$ réduite $\Rightarrow \mathbb{T}_1 = 0$ ou $\exists t \in \mathbb{T}_1$ inversible
- $\mathbb{T}_1 = 0 \Leftrightarrow a_\mathfrak{p} = 0 \ \forall \mathfrak{p} \neq 0$ dans $C \Leftrightarrow a_\mathfrak{p} = a_\mathfrak{p} \chi_{L/K}(\mathfrak{p}) \ \forall \mathfrak{p}$.
- représentations ρ dim 2 irréductible : $\rho \cong \rho \otimes \chi \Leftrightarrow \rho = \mathrm{ind}_{G/\ker \chi}^{\Psi}$.