Correction d'exercices FMI

Dénombrement

Correction (3.9)**.**

1. Pour ranger n boules indiscernables dans p tiroirs, on met un certain nombre de boules dans le premier tiroir, puis on passe au second, dans lequel on en met encore un certain nombre, puis on passe au troisième, etc... jusqu'à être arrivé au dernier tiroir et y avoir mis les boules restantes. Si on note B pour l'opération "mettre une boule dans le tiroir où on est" et T pour l'opération "passer au tiroir suivant", le processus consistant à mettre n boules dans les p tiroirs est donc un mot avec $n+p-1$ lettres, exactement n lettres B et $p-1$ lettres T.

Par exemple, pour $n = 10$, $p = 6$, le mot $BBTBBBBTTBBTBTB$ signifie qu'on a mis 2 boules dans le premier tiroir, 4 boules dans le second, aucune boule dans le troisième, 2 boules dans le quatrième, 1 boule dans le cinquième et 1 boule dans le sixième tiroir. Compter le nombre de répartitions de n boules dans p tiroirs, c'est donc exactement compter le nombre de mots de taille $n+p-1$ avec n lettres B et $p-1$ lettres T. Le choix d'un tel mot revient au choix des positions des lettres T (le reste étant forcément constitué de lettres B), et on a donc $\binom{n+p-1}{p-1}$ choix possibles.

2. Le choix d'un p-uplet $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{N}^p$ tel que $x_1 + \cdots + x_p = n$ est exactement le choix d'une répartition de n boules dans p tiroirs, où chaque x_i est le nombre de boules dans le i-ème tiroir. Ainsi, il y a d'après la question 1 exactement $\binom{n+p-1}{p-1}$ p-uplets.

Correction (3.17)**.**

1. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(x_k - a)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - 2x_k a + a^2) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(x_k^2) + \sum_{k=1}^{n}(-2x_k a) + \sum_{k=1}^{n} a^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2a(\sum_{k=1}^{n} x_k) + na^2
\end{aligned}$$

Pour la première égalité, on développe chaque $(x_k - a)^2$. Pour la seconde, on utilise la formule b) du 3.19, pour la troisième égalité, on utilise la formule (c) et le fait que a^2 sommé de 1 à n est égal à na^2.

2. On applique la formule précédente :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(x_k - m)^2 &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2m(\sum_{k=1}^{n} x_k) + nm^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2nm^2 + nm^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - nm^2
\end{aligned}$$

Dans la deuxième égalité, on utilise simplement que $\sum_{k=1}^{n} x_k = nm$ par définition de la moyenne arithmétique.

Correction (3.18)**.**
3. Cette somme est encore une somme téléscopique :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{100} \ln(1+1/k) &= \sum_{k=1}^{100} \ln((k+1)/k) \\
&= \sum_{k=1}^{100} \ln(k+1) - \ln(k) \\
&= \sum_{j=2}^{101} \ln(j) - \sum_{k=1}^{100} \ln(k) \\
&= \ln(101) + \sum_{j=2}^{100} \ln(j) - \ln(1) - \sum_{k=2}^{100} \ln(k) \\
&= \ln(101)
\end{aligned}$$

car $\ln(1) = 0$. Dans la troisième ligne, on fait une réindexation $j = k+1$.
4. Remarquons avant de calculer la somme que $k^2 - k - 2 = (k+1)(k-2)$, donc $(k^2 - k - 2)/(k-2) = k+1$. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3}^{30} \frac{k^2 - k - 2}{k - 2} &= \sum_{k=3}^{30} k + 1 \\
&= \sum_{j=4}^{31} j \\
&= \sum_{j=1}^{31} j - (1+2+3) \\
&= \frac{31 \times 32}{2} - 6 \\
&= 490
\end{aligned}$$

avec dans la deuxième ligne une réindexation $j = k+1$ (contrairement aux indications de l'exercice, celle-ci est plus efficace).