Raisonnement par récurrence

Correction (1.26)**.**

La deuxième inégalité a été faite en cours, nous démontrons ici seulement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leq n!$. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}(n) : 2^{n-1} \leq n!$. Nous allons démontrer qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

- Initialisation : Pour $n = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est la propriété $2^0 \leq 1!$ soit $1 \leq 1$, qui est vraie.
- Hérédité : Supposons que pour $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On a par hypothèse
$$2^{n-1} \leq n! \quad \text{donc} \quad 2^n = 2 \cdot 2^{n-1} \leq 2n!$$
en multipliant l'inégalité de chaque côté par 2. Comme $n \geq 1$, $2 \leq n+1$ donc $2n! \leq (n+1)n!$ qui est égal à $(n+1)!$. On a donc
$$2^n \leq (n+1)!.$$
Nous venons ainsi de démontrer $\mathcal{P}(n+1)$.
- Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Correction (1.26)**.**

1. Pour $n \geq 3$, supposons que P_n est vraie, c'est-à-dire que $2^n > n^2$. Alors,
$$2^{n+1} > 2n^2$$
mais nous voulons avoir $(n+1)^2$ à droite. Or,
$$2n^2 - (n+1)^2 = 2n^2 - n^2 - 2n - 1 = n^2 - 2n - 1.$$
C'est un polynôme de degré deux en n, de discriminant $\Delta = 8$, et dont les racines sont après calcul $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$. Il est donc positif en-dehors de l'intervalle déterminé par ces racines, et comme $1 + \sqrt{2} < 3$, pour tout $n \geq 3$,
$$2n^2 \geq (n+1)^2.$$
Combinée avec la première inégalité, nous obtenons donc
$$2^{n+1} > (n+1)^2.$$
Nous avons bien prouvé $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$.

2. P_0, P_1, P_2, P_3 et P_4 sont respectivement les propriétés $1 > 0$, $2 > 4$, $4 > 4$, $8 > 9$ et $16 > 16$. À part P_0, elles sont donc toutes fausses. Par contre, P_5 est la propriété $32 > 25$ qui est vraie. On peut donc utiliser l'hérédité (montrée dans la question 1) pour prouver par récurrence que pour tout $n \geq 5$, P_n est vraie. Ainsi, P_n est vraie pour $n = 0$ ou $n \geq 5$. Cet exercice est un exemple de situation où l'hérédité est vraie avant que l'initialisation le soit.

Correction (1.28, question 2)**.**

Montrons par récurrence sur n la propriété
$$P_n : \forall x > 0, (1+x)^n \geq 1 + nx$$
pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Initialisation : pour $n = 0$, $(1+x)^0 = 1$ et $1 + 0x = 1$ également, donc P_0 est vraie.

– Hérédité : Supposons que P_n est vraie pour $n \geq 0$, montrons que P_{n+1} est vraie. Pour $x > 0$, on a par hypothèse
$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$
En multipliant des deux côtés par le réel positif $(1+x)$, on a donc
$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$$
Or, $x^2 \geq 0$ donc $nx^2 \geq 0$. On a donc
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$
La propriété P_{n+1} est donc vraie.

– Conclusion : pour tout $n \geq 0$, P_n est vraie.

Exercice (1.29)**.**

La notation $\sum$ n'étant pas encore vue, l'exercice 1.29 est ici réécrit avec les notations classiques. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$$a_n = 1 + 2 + \cdots + n, \qquad b_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2, \qquad c_n = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$
Autrement dit, a_n est la somme des entiers de 1 à n, b_n la somme de leurs carrés, et c_n la somme de leurs cubes. Montrer que $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, et $c_n = a_n^2$.

Correction (1.29)**.**

Notons pour tout n, P_n, Q_n et R_n les propriétés
$$P_n : \left(a_n = \frac{n(n+1)}{2}\right) \quad Q_n : \left(b_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \quad R_n : (c_n = a_n^2)$$
Nous allons montrer par récurrence que P_n, Q_n et R_n sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Commençons par les P_n.

– Initialisation : pour $n = 1$, $a_1 = 1$ et
$$\frac{1(1+1)}{2} = 1.$$
donc P_1 est vraie.

– Hérédité : Supposons que P_n est vraie pour $n > 0$, montrons que P_{n+1} est alors vraie. Par hypothèse de récurrence, on a alors
$$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$
donc P_{n+1} est vraie.

– Conclusion : P_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

Maintenant, passons aux Q_n :

– Initialisation : pour $n = 1$, $b_1 = 1$ et
$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1.$$
donc Q_1 est vraie.

– Hérédité : Supposons que Q_n est vraie pour $n > 0$, montrons que Q_{n+1} est alors vraie. On a alors
$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n(2n+1) + 6(n+1))}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}, \end{aligned}$$
ce qui prouve que Q_{n+1} est vraie.

– Conclusion : Q_n est vraie pour tout $n \geq 0$.

Enfin, démontrons que tous les R_n sont vrais.

– Initialisation : pour $n = 1$, $c_1 = 1$ et

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1.$$

Donc R_1 est vraie.

– Hérédité : Supposons que R_n est vraie pour $n > 0$, montrons que R_{n+1} est alors vraie. Par définition,

$$c_{n+1} = c_n + (n+1)^3.$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= a_n^2 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\ &= \frac{n^2(n+1)^2 + 4(n+1)^3}{4} = \frac{(n+1)^2(n^2 + 4(n+1))}{4} \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = a_{n+1}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, R_{n+1} est vraie.

– Conclusion : pour tout $n \geq 1$, R_n est vraie.

Correction (1.35).

Pour formaliser l'exercice, notons pour tout n la propriété :

P_n : "Si dans une pièce, il se trouve n personnes dont au moins une fille, ces n personnes sont des filles".

Il est clair que P_1 est vraie mais que P_n est fausse pour tout $n \geq 2$. Le raisonnement présenté dans l'exercice est donc faux, nous allons chercher à voir ce qui pose problème. L'initialisation est vraie car P_1 est vraie, regardons du côté de l'hérédité.

Si P_n est vraie, considérons une pièce avec $n+1$ personnes dont une fille F. On fait sortir une personne P qui n'est pas F. Alors, la pièce contient maintenant n personnes dont au moins une (F) est une fille. Ce sont donc toutes des filles. Maintenant, en faisant sortir F et rentrer P, on se retrouve avec une pièce à n personnes. L'erreur du raisonnement commence ici : si $n \geq 2$, il y a une deuxième fille F' qui n'est ni P ni F, et qu'on n'a pas fait sortir de la pièce. Alors, la pièce d'où est sortie F et est rentrée P contient toujours une fille, et donc elle ne contient que des filles, donc P est une fille. Nous savions déja que tous les autres membres de la pièce étaient des filles, donc la pièce à $n+1$ personnes ne contient que des filles. Nous venons donc de prouver que pour $n \geq 2$, $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$.

L'hérédité est donc vraie seulement pour $n \geq 2$, alors qu'on aurait besoin de l'hérédité pour tout $n \geq 1$. Qu'en est-il pour $n = 1$? En reproduisant le raisonnement précédent, on part d'une pièce avec deux personnes dont au moins une fille F. On fait sortir une personne (la seule) P qui n'est pas F. La pièce ne contient maintenant que F qui est bien une fille. Maintenant, en faisant sortir F et rentrer P, la pièce ne contient plus que P, mais rien ne nous dit que c'est une fille ! C'était la faute du raisonnement par récurrence présenté.

Correction (1.36).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité $10^{n+1} = 10^n(9+1)$. Alors,

$$10^{n+1} - 1 = 10^n(9+1) - 1 = (10^n - 1)(9+1) + (9+1) - 1 = (10^n - 1)(9+1) + 9$$

et

$$10^{n+1} + 1 = 10^n(9+1) + 1 = (10^n + 1)(9+1) - (9+1) + 1 = (10^n + 1)(9+1) - 9$$

donc si P_n est vraie, 9 divise $10^n - 1$ donc 9 divise $10^{n+1} - 1$ par la première ligne, et si Q_n est vraie, 9 divise $10^n + 1$ donc 9 divise $10^{n+1} + 1$ par la deuxième ligne. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n \Longrightarrow P_{n+1}$ et $Q_n \Longrightarrow Q_{n+1}$.

2. Nous sommes dans le cas où l'hérédité des propositions P_n et Q_n est prouvée (par la question 1) mais où il faut regarder de plus près l'initialisation. Pour le cas de P_n, P_0 est la propriété "9 divise $10^0 - 1 = 0$", elle est donc vraie. Par récurrence, P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. A contrario, Q_0 est la propriété "9 divise $10^0 + 1 = 2$" qui est donc fausse. Il est donc faux de dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est vraie (en fait, on vérifie facilement que Q_n est faux pour tout n en appliquant la récurrence à $\neg Q_n$).