Raisonnement par contraposée

Correction (1.22)**.**
La contraposée de la proposition "$x^3 = 2 \Rightarrow x < 2$" est "$x \geq 2 \Leftarrow x^3 \neq 2$". Si $x \geq 2$, $x^3 \geq 2^3 = 8$, donc en particulier $x^3 \neq 2$, ce qui prouve la contraposée.

Correction (1.23)**.**
1. La propriété de l'énoncé s'écrit

$$(\forall m \in \mathbb{N}, n^2 - 1 \neq 8m) \Longrightarrow (\exists l \in \mathbb{N}, n = 2\ell).$$

2. La contraposée de la formule ci-dessus est

$$(\forall l \in \mathbb{N}, n \neq 2l) \Longrightarrow (\exists m \in \mathbb{N}, n^2 - 1 = 8m).$$

3. Soit n un entier impair. On pose $n = 4k + r$ la division euclidienne de n par 4. Alors, r est un entier entre 0 et 3, mais s'il était égal à 0 ou 2, n serait pair. Donc $r = 1$ ou 3 comme n est supposé impair. Mais alors,

$$n^2 - 1 = (4k + r)^2 - 1 = (16k^2 + 8kr + r^2) - 1 = 8(2k^2 + kr) + r^2 - 1.$$

Or, si $r = 1$, $r^2 - 1 = 0$ et si $r = 3$, $r^2 - 1 = 8$. Dans les deux cas, 8 divise $r^2 - 1$ donc $n^2 - 1$ par l'égalité ci-dessus. Nous venons donc de prouver que si n est impair, 8 divise $n^2 - 1$, c'est-à-dire la formule de la question 2).

4. La propriété de l'énoncé étant la contraposée de la formule de la question 2), elles sont équivalentes. Comme nous avons prouvé la formule de la question 2), nous avons démontré la propriété de l'énoncé.

Exercice.
Soit $A, B \in \mathbb{R}$. Considérons la propriété

$$(P): \quad (\forall \varepsilon > 0, A < B + \varepsilon) \Longrightarrow (A \leq B).$$

1. Montrer que (P) est vraie par contraposée.
2. Montrer que la réciproque de (P) est également vraie pour tous A et B.

Correction.
1. La contraposée de (P) est

$$(A > B) \Longrightarrow (\exists \varepsilon > 0, A \geq B + \varepsilon).$$

Nous allons donc montrer cette propriété. Supposons que $A > B$. Alors, $A - B > 0$ et pour $\varepsilon = A - B$, on a bien

$$A \geq B + \varepsilon = A.$$

On a donc un exemple de $\varepsilon > 0$ tel que $A \geq B + \epsilon$. La contraposée de (P) est ainsi démontrée, ce qui prouve (P).

2. La réciproque de (P) est

$$(A \leq B) \Longrightarrow (\forall \varepsilon > 0, A < B + \varepsilon).$$

Démontrons qu'elle est également vraie. Supposons que $A \leq B$. Pour tout $\varepsilon > 0$, $B < B + \varepsilon$ et donc $A < B + \varepsilon$ car $A \leq B$. Nous avons donc montré la réciproque de (P).