Correction d'exercices FMI

Raisonnement par l'absurde

Correction (1.18)**.**

1. Par l'absurde, supposons qu'Alice soit menteuse. Alors son affirmation « L'un d'entre nous deux au moins est menteur » est fausse, mais elle est vraie puisqu'Alice est menteuse : contradiction. Donc Alice est sincère. Par conséquent son affirmation est vraie, donc Bob est menteur.
2. Par l'absurde, supposons que Chloé soit menteuse. Alors son affirmation « Je suis menteuse ou Denis est sincère » est fausse, c'est-à-dire qu'elle est sincère et Denis est menteur : contradiction puisqu'on l'a supposée menteuse. Donc Chloé est sincère. Par conséquent son affirmation est vraie : elle est menteuse ou Denis est sincère, mais puisqu'elle n'est pas menteuse, Denis est aussi sincère.
3. Par l'absurde, supposons que Gaspard soit sincère. Alors son affirmation « Nous sommes tous menteurs » est vraie, donc il est menteur : contradiction puisqu'on l'a supposé sincère. Donc Gaspard est menteur, et en particulier son affirmation est fausse : au moins l'un des trois est sincère. Par l'absurde, supposons que Melchior soit menteur. Alors son affirmation « Un et un seul d'entre nous est sincère » est fausse, c'est-à-dire qu'au moins deux d'entre eux sont sincères (car au moins un l'est d'après ce qui précède) : contradiction puisque Gaspard est menteur et Melchior a été supposé menteur. Donc Melchior est sincère, et en particulier son affirmation est vraie, et il est donc le seul à être sincère : Balthazar est menteur.

Correction (1.19)**.**

1. Par l'absurde, supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel. On peut l'écrire $\sqrt{2} = p/q$ avec p et q entiers, donc $q\sqrt{2} = p$ et $2q^2 = p^2$. Mais tout rationnel peut s'écrire comme une fraction irréductible, donc on peut supposer qu'on a pris la fraction p/q irréductible, c'est-à-dire que p et q sont premiers entre eux.
2. Par l'absurde, supposons que p soit impair. On peut donc l'écrire $p = 2k + 1$ avec k entier, d'où $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ est impair. Mais $p^2 = 2q^2$, donc p^2 est pair : contradiction. Donc p est pair.
3. Écrivons $p = 2p'$ avec p' entier, ce qui est possible puisque p est pair. On a donc $2q^2 = p^2 = (2p')^2 = 4p'$, d'où $q^2 = 2p'^2$ en divisant par deux. D'après le raisonnement ci-dessus, q est pair.
4. On a prouvé que p et q sont tous les deux pairs, mais c'est impossible car ils sont premiers entre eux : contradiction. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Correction (1.17)**.**

1. La propriété (P) est équivalente à $\exists i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} \leq \frac{1}{n}$.
2. Sa négation est $\forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i - x_{i-1} > \frac{1}{n}$.
3. Par l'absurde, supposons que (P) soit fausse, c'est-à-dire que sa négation soit vraie. Alors le nombre $x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + \cdots + (x_2 - x_1) + (x_1 - x_0)$ est la somme de n nombres strictements supérieurs à $\frac{1}{n}$, donc $x_n - x_0 > n\frac{1}{n} = 1$. Mais $x_0 \geq 0$ et $x_n \leq 1$ donc on a aussi $x_n - x_0 \leq 1 - 0 = 1$: contradiction. Donc (P) est vraie.