Correction d'exercices FMI

Quantificateurs

Correction (1.8).
- Oui : tout élément de A appartient à B.
- Non : contre-exemple, lorsque $B \subsetneq A$ on peut trouver un élément de B qui n'appartienne pas à A.
- Oui : pour tout élément de E, s'il appartient à A alors il appartient aussi à B.
- Non : par exemple si $E = \{0, 1\}$, $A = \{0\}$ et $B = \{1\}$ la propriété est vraie mais $A \subset B$ est fausse.

Correction (1.10).
Attention, le vrai/faux indiqué porte sur la proposition initiale, pas sur sa négation écrite en début de ligne.

1. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}^*, x^2 \leq 0$. Vrai : un carré de réel est positif, et un carré d'élément non nul est non nul.
2. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$. Faux : 0 est un contre-exemple.
3. Négation : $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$. Vrai : 1 est un exemple.
4. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} \neq x$. Faux : -1 est un contre-exemple.
5. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$. Vrai : étant donné x il suffit de prendre $y = -x$.
6. Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$. Faux : sa négation est vraie car étant donné y il suffit de prendre $x = 1 - y$.
   Les deux énoncés sont différents : dans le premier y peut dépendre de x alors que dans le second y ne dépend pas de x.
7. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}^+, x < y$. Faux : -1 est un contre exemple (il est strictement inférieur à tout réel positif).
8. Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, x < y$. Faux : sa négation est vraie car étant donné y il suffit de prendre $x = y - 1$.
9. Négation : $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}^+, x < y$. Vrai : 0 est un exemple.

Correction (1.9).
La définition de « f n'est pas bornée » est « $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, |f(x)| > M$. » Note : ce x peut dépendre de M.
La définition de « f n'est pas croissante » est « $\exists (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geq y\ \wedge\ f(x) < f(y)$. »

Correction (1.11).

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}, x^2 = n$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in \mathbb{R}^+, x \geq n$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x \leq n$.
4. $\forall x \in I, x \geq 1 \wedge x \leq 2$ ou encore $\forall x \in I, x \in [1, 2]$.