Correction d'exercices FMI

Image directe, image réciproque, composition

Exercice (2.16 bis).
Soit $f : A \to B$ une application, et soient Y_1, Y_2 des parties de B. Montrer les propriétés suivantes :

1. si $Y_1 \subset Y_2$, alors $f^*(Y_1) \subset f^*(Y_2)$
2. $f^*(Y_1 \cup Y_2) = f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2)$
3. $f^*(Y_1 \cap Y_2) = f^*(Y_1) \cap f^*(Y_2)$.

Exercice (supplémentaire 1). Soient
$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (2x, x+1) \end{array} \right.$, $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy-1 \end{array} \right.$ et $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^2}{3} \end{array} \right.$.
Déterminer quelles composées de deux fonctions parmi f, g et h ont un sens, et les expliciter.

Exercice (supplémentaire 2).
Soit $f : \mathbb{N}_{\geq 2} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout entier $n \geq 2$, $f(n)$ est le plus petit facteur premier de n (On décompose n en produit de nombres premiers et on ne garde que le plus petit). Déterminer l'image directe par f des ensembles suivants :

1. $A = \{105\}$,
2. $B = \{4, 6, 9\}$,
3. $C = \mathbb{N}_{\geq 2}$ (montrer que $f(C) = \mathbb{P}$, où $\mathbb{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers),
4. l'ensemble D des nombres pairs supérieurs ou égaux à 2.

Correction (2.16 bis).

1. Supposons que $Y_1 \subset Y_2$, et montrons que $f^*(Y_1) \subset f^*(Y_2)$.
   Soit $x \in f^*(Y_1)$.
   Par définition, on a $f(x) \in Y_1$. Mais puisque $Y_1 \subset Y_2$, on a aussi $f(x) \in Y_2$.
   Donc $x \in f^*(Y_2)$.
   On a donc $f^*(Y_1) \subset f^*(Y_2)$.
2. On va montrer le résultat par double inclusion.
   Montrons tout d'abord $f^*(Y_1 \cup Y_2) \subset f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2)$.
   Soit $x \in f^*(Y_1 \cup Y_2)$.
   Par définition, on a $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$, c'est-à-dire que $f(x) \in Y_1$ ou $f(x) \in Y_2$.
   Premier cas : $f(x) \in Y_1$. Alors par définition $x \in f^*(Y_1)$.
   Second cas : $f(x) \in Y_2$. Alors par définition $x \in f^*(Y_2)$.
   Dans tous les cas on a $x \in f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2)$.
   Donc $f^*(Y_1 \cup Y_2) \subset f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2)$.

   Montrons maintenant $f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2) \subset f^*(Y_1 \cup Y_2)$.
   Soit $x \in f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2)$, c'est-à-dire $x \in f^*(Y_1)$ ou $x \in f^*(Y_2)$.
   Premier cas : $x \in f^*(Y_1)$. Alors par définition $f(x) \in Y_1$.
   Second cas : $x \in f^*(Y_2)$. Alors par définition $f(x) \in Y_2$.
   Dans tous les cas, $f(x) \in Y_1 \cup Y_2$.
   Donc $x \in f^*(Y_1 \cup Y_2)$. Donc $f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2) \subset f^*(Y_1 \cup Y_2)$.

   Par double inclusion, on a bien montré $f^*(Y_1 \cup Y_2) = f^*(Y_1) \cup f^*(Y_2)$.

3. Pour voir une méthode de preuve différente, on va montrer le résultat par équivalences.
Soit $x \in A$. On a

$$\begin{aligned} x \in f^*(Y_1 \cap Y_2) &\iff f(x) \in Y_1 \cap Y_2 \text{ (par définition de l'image réciproque)} \\ &\iff f(x) \in Y_1 \text{ et } f(x) \in Y_2 \text{ (par définition de l'intersection)} \\ &\iff x \in f^*(Y_1) \text{ et } x \in f^*(Y_2) \text{ (par définition de l'image réciproque)} \\ &\iff x \in f^*(Y_1) \cap f^*(Y_2) \text{ (par définition de l'intersection).} \end{aligned}$$

Donc $f^*(Y_1 \cap Y_2) = f^*(Y_1) \cap f^*(Y_2)$.

Correction (supplémentaire 1)**.** Regardons toutes les compositions possibles.

- $f \circ g$: l'ensemble d'arrivée de g est le même que celui de départ de f, donc cette composition $f \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a du sens. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(f \circ g)(x, y) = f(z) = (2z, z + 1)$ où $z = g(x, y) = xy - 1$ d'où $(f \circ g)(x, y) = (2(xy - 1), (xy - 1) + 1) = (2xy - 2, xy)$. On a donc
$$f \circ g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2xy - 2, xy) \end{array} \right. .$$
- $g \circ f$: l'ensemble d'arrivée de f est le même que celui de départ de g, donc cette composition $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a du sens. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, on a $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x, x + 1) = (2x)(x + 1) - 1 = 2x^2 + 2x - 1$. On a donc
$$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x^2 + 2x - 1 \end{array} \right. .$$
- $f \circ h$: l'ensemble d'arrivée de h est le même que celui de départ de f, donc cette composition $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ a du sens. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = f(x^2/3) = (2(x^2/3), (x^2/3) + 1)$. On a donc
$$f \circ h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (\frac{2x^2}{3}, \frac{x^2}{3} + 1) \end{array} \right. .$$
- $h \circ f$: l'ensemble d'arrivée de f est $\mathbb{R}^2$ mais l'ensemble de départ de h est $\mathbb{R}$, donc la composition $h \circ f$ n'a pas de sens.
- $g \circ h$: l'ensemble d'arrivée de h est $\mathbb{R}$ mais l'ensemble de départ de g est $\mathbb{R}^2$, donc la composition $g \circ h$ n'a pas de sens (remarque : dans certains contextes on pourrait voir $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{R}^2$, pour cette exercice on considère que $\mathbb{R}$ n'est pas naturellement une partie de $\mathbb{R}^2$).
- $h \circ g$: l'ensemble d'arrivée de g est le même que celui de départ de h, donc cette composition $h \circ g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a du sens. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $(h \circ g)(x, y) = h(g(x, y)) = h(xy - 1) = (xy - 1)^2/3$. On a donc
$$h \circ g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \frac{(xy-1)^2}{3} \end{array} \right. .$$

Correction (supplémentaire 2)**.**

1. On a $f(A) = \{f(105)\}$. Calculons donc $f(105)$. On a $105 = 3 \times 5 \times 7$, et donc son plus petit facteur premier est $f(105) = 3$. On a donc $f(A) = \{3\}$.
2. On a $f(B) = \{f(4), f(6), f(9)\}$. Puisque $4 = 2 \times 2$, $6 = 2 \times 3$ et $9 = 3 \times 3$ on obtient $f(4) = 2$, $f(6) = 2$ et $f(9) = 3$. On en déduit $f(B) = \{2, 3\}$.
3. Par définition de f, on a $f(\mathbb{N}_{\geq 2}) \subset \mathbb{P}$. Montrons qu'on a aussi en fait égalité en montrant l'inclusion opposée, c'est-à-dire $\mathbb{P} \subset f(\mathbb{N}_{\geq 2})$.
   Soit $p \in \mathbb{P}$. Montrons que $p \in f(\mathbb{N}_{\geq 2})$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ tel que $f(n) = p$.
      Posons $n = p$. Alors n est bien un élément de $\mathbb{N}_{\geq 2}$. De plus, la décomposition en produit de nombres premiers de n est simplement $n = p$, donc $f(n) = p$.
   On a donc $p \in f(\mathbb{N}_{\geq 2})$.
   Donc $\mathbb{P} \subset f(\mathbb{N}_{\geq 2})$.
   Finalement, on a bien démontré par double inclusion que $f(\mathbb{N}_{\geq 2}) = \mathbb{P}$.

4. Montrons que $f(D) = \{2\}$.
   Commençons par montrer que $\{2\} \subset f(D)$. Pour cela, il suffit de montrer que $2 \in f(D)$, c'est-à-dire qu'il existe $n \in D$ tel que $f(n) = 2$.
   Posons $n = 2$. On a bien $n \in 2$, et la décomposition en facteurs premiers de n est $n = 2$ donc $f(n) = 2$.
   Montrons maintenant que $f(D) \subset \{2\}$.
   Soit $p \in f(D)$.
   Par définition, il existe $n \in D$ tel que $f(n) = p$. Comme $n \in D$, l'entier n est pair, donc 2 intervient dans sa décomposition en produit de nombres premiers. Puisque 2 est le plus petit nombre premier, on a $f(n) = 2$. Mais $f(n) = p$, donc $p = 2$.
   Donc $p \in \{2\}$.
   On a donc $f(D) \subset \{2\}$.
   Finalement, on a bien démontré par double inclusion que $f(D) = \{2\}$.