Correction d'exercices FMI

Ensembles, produit cartésien

Correction (2.6)**.**

Nous allons montrer l'égalité par double inclusion.

Si $x \in A \cup B \cup C$, on a sept possibilités (faire un dessin avec des patates peut aider) :

(a) x appartient à la fois à A, B et C.

(b) x appartient à A et B mais pas à C.

(c) x appartient à A et C mais pas à B.

(d) x appartient à A mais ni à B ni à C.

(e) x appartient à B et C mais pas à A.

(f) x appartient à B mais ni à A ni à C.

(g) x appartient à C mais ni à A ni à B.

Le (a) signifie exactement que $x \in A \cap B \cap C$. Dans les cas (c) et (d), $x \in A\backslash\ C$. Dans les cas (b) et (f), $x \in B\backslash C$. Enfin, dans les cas (e) et (g), $x \in C\backslash A$. En regroupant ces sept cas, on sait donc que $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A) \cup (A \cap B \cap C)$.

Donc $A \cup B \cup C \subset (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A) \cup (A \cap B \cap C)$.

Réciproquement, comme $A\backslash B \subset A$, $B\backslash C \subset B$, $C\backslash A \subset C$ et $A \cap B \cap C \subset A$,

$$(A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A) \cup (A \cap B \cap C) \subset A \cup B \cup C \cup A = A \cup B \cup C.$$

Par double inclusion, on a bien montré que

$$A \cup B \cup C = (A\backslash B) \cup (B\backslash C) \cup (C\backslash A) \cup (A \cap B \cap C).$$

Correction (2.9)**.**

1. Pour une partie A de E, on a

$$E\Delta A = (E\backslash A) \cup (A\backslash E) = E\backslash A \cup \emptyset = \complement_E A.$$

$$A\Delta A = (A\backslash A) \cup (A\backslash A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

$$A\Delta \complement_E A = (A\backslash \complement_E A) \cup (\complement_E A\backslash A) = A \cup \complement_E A = E.$$

$$\emptyset\Delta A = (\emptyset\backslash A) \cup (A\backslash\emptyset) = \emptyset \cup A = A.$$

2. Montrons le résultat par double inclusion.

Si $x \in A\Delta B$,

ou bien $x \in A\backslash B$ alors $x \in A$ mais $x \notin A \cap B$.

ou bien $x \in B\backslash A$, alors $x \in B$ mais $x \notin A \cap B$.

Dans les deux cas, $x \in A \cup B$ et $x \notin A \cap B$, donc $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

Donc $A\Delta B \subset (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

Réciproquement :

Si $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B)$,

ou bien $x \in A$ (mais alors $x \notin B$ car $x \notin A \cap B$),

ou bien $x \in B$ (mais alors $x \notin A$ car $x \notin A \cap B$).

Donc $x \in (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ dans les deux cas.

Donc $(A \cup B) \backslash (A \cap B) \subset A \Delta B$.

Par double inclusion, on a bien montré que $A \Delta B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

3. Si $B = C$, il est clair que $A \Delta B = A \Delta C$. Il reste donc à montrer l'autre implication.

Si $A \Delta B = A \Delta C$, montrons par double inclusion que $B = C$.

Soit $x \in B$. Alors :

ou bien $x \in A \cap B$, donc $x \notin A \Delta B = A \Delta C$ donc $x \in C$ (car $x \in A$),

ou bien $x \in B \backslash A$, donc $x \in A \Delta B = A \Delta C$, donc $x \in C$ car $x \notin A$.

Dans les deux cas, $x \in C$.

Donc $B \subset C$.

On prouve exactement de la même manière que $C \subset B$, donc $B = C$.

Ceci prouve l'équivalence.

Correction (2.10)**.**

L'ensemble C est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$.

Nous allons montrer par l'absurde qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit cartésien $C = A \times B$ avec A et B des parties de $\mathbb{R}$.

Supposons que $C = A \times B$.

Comme $(1, 0) \in C$ (puisque $1^2 + 0^2 = 1$), $1 \in A$ et $0 \in B$ par définition du produit cartésien.

Comme $(0, 1) \in C$ (puisque $0^2 + 1^2 = 1$), $0 \in A$ et $1 \in B$ de la même manière.

Donc $(0, 0) \in A \times B$ puisque $0 \in A$ et $0 \in B$.

Or, $(0, 0) \notin C$ car $0^2 + 0^2 = 0 \neq 1$.

Nous arrivons à une contradiction.

Nous avons donc montré par l'absurde que C ne peut pas s'écrire comme produit cartésien de parties de $\mathbb{R}$.