Correction d'exercices FMI

Dénombrement

Correction (3.1).
On va utiliser plusieurs fois la formule du cardinal de la réunion de deux ensembles finis. On calcule

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Card}(E \cup F \cup G) \\
= \; & \mathrm{Card}(E \cup (F \cup G)) \\
= \; & \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F \cup G) - \mathrm{Card}(E \cap (F \cup G)) \\
= \; & \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F \cup G) - \mathrm{Card}((E \cap F) \cup (E \cap G)) \\
= \; & \mathrm{Card}(E) + \Big(\mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}(F \cap G)\Big) \\
& \quad - \Big(\mathrm{Card}(E \cap F) + \mathrm{Card}(E \cap G) - \mathrm{Card}((E \cap F) \cap (E \cap G))\Big) \\
= \; & \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(G) - \mathrm{Card}(F \cap G) \\
& \quad - \Big(\mathrm{Card}(E \cap F) + \mathrm{Card}(E \cap G) - \mathrm{Card}(E \cap F \cap G)\Big) \\
= \; & \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(G) \\
& \quad - \mathrm{Card}(F \cap G) - \mathrm{Card}(E \cap F) - \mathrm{Card}(E \cap G) \\
& \quad + \mathrm{Card}(E \cap F \cap G).
\end{aligned}$$

Correction (3.7).

1. On va décrire les chemins en notant D un mouvement d'une unité vers la droite et H un déplacement d'une unité vers le haut. Un chemin allant du point O au point A doit donc comporter trois D et deux H. Les possibilités sont
   - $DDDHH$
   - $DDHDH$
   - $DDHHD$
   - $DHDDH$
   - $DHDHD$
   - $DHHDD$
   - $HDDDH$

   soit 10 possibilités au total.
2. (a) On va donner deux solutions pour cette question.
   Première solution :
   Comme on l'a vu à la question 1, un chemin de M à N peut être représenté par un mot comportant $p'-p$ fois la lettre D et $q'-q$ fois la lettre H, c'est-à-dire un anagramme du mot $D \ldots DH \ldots H$. D'après l'exercice 3.6, le nombre de tels anagrammes est

   $$\frac{(p'-p+q'-q)!}{(p'-p)!(q'-q)!}.$$

   Deuxième solution :
   On remarque qu'un chemin doit comporter exactement $p'-p+q'-q$ mouvements, dont $p'-p$ horizontaux et $q'-q$ verticaux. Choisir un tel chemin revient donc à choisir, parmi les $p'-p+q'-q$ mouvements, lesquels seront horizontaux. Il s'agit donc de

choisir $p'-p$ mouvements parmi les $p'-p+q'-q$ possibles. Leur nombre est donc

$$\binom{p'-p+q'-q}{p'-p}.$$

(b) Un chemin qui va de O à N en passant par M est la même chose qu'un chemin allant de O à M suivi d'un chemin allant de M à N. Le nombre de tels chemins est donc le nombre de chemins de O à M multiplié par le nombre de chemins de M à N. D'après la question précédente, ce nombre est donc

$$\binom{p+q}{q}\binom{p'-p+q'-q}{q'-q} = \frac{(p+q)!(p'-p+q'-q)!}{p!q!(p'-p)!(q'-q)!}.$$