Correction d'exercices FMI

Injections, surjections, bijections

Correction (2.24)**.**

L'application f n'est pas injective car $f(0) = 0^2 + 0 + 1 = 1$ et $f(-1) = (-1)^2 + (-1) + 1 = 1$ donc 0 et -1 ont la même image (ou, ce qui revient au même, 1 possède deux antécédents).
Elle n'est pas non plus surjective : en effet un tableau de variations de x^2+x+1 montre que $f(k) \geq 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En particulier 0 n'a pas d'antécédent par f.

Si on ne voit pas immédiatement ces propriétés, il est possible de les trouver en étudiant l'équation des antécédents : $f(k) = y$ d'inconnue $k \in \mathbb{Z}$, pour un y fixé dans $\mathbb{Z}$. En effet cette équation s'écrit $k^2 + k + 1 - y = 0$. On peut calculer son discriminant $\Delta = 1 - 4(1 - y) = -3 + 4y$. On peut alors chercher des valeurs de y telles que l'équation n'ait pas de solution et telle qu'elle en ait deux (attention, les deux solutions doivent être entières ; en particulier le discriminant doit être le carré d'un entier). Les exemples précédents correspondent respectivement à $y = 1$ (qui donne $\Delta = 1$ et $k = -1, 0$) et à $y = 0$ (qui donne $\Delta = -3 < 0$: pas de solution).

Correction (2.25)**.**

1. L'ensemble de départ de f est le même que l'ensemble d'arrivée de g, donc l'application composée $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a du sens.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x, x^2) = f(X, Y)$ où $X = x$ et $Y = x^2$, d'où $(f \circ g)(x) = f(X, Y) = XY = x(x^2) = x^3$. On a donc
   $$f \circ g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array} \right. .$$
   L'ensemble de départ de g est le même que l'ensemble d'arrivée de f, donc l'application composée $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a du sens.
   Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On calcule $(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(xy) = g(X)$ où $X = xy$, d'où on tire $(g \circ f)(x, y) = g(X) = (X, X^2) = (xy, (xy)^2) = (xy, x^2y^2)$. On a donc
   $$g \circ f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (xy, x^2y^2) \end{array} \right. .$$

2. L'application f n'est pas injective, car $f(1, 1) = 1 \times 1 = 1$ et $f(-1, -1) = (-1) \times (-1) = 1$, donc 1 a au moins deux antécédents. Montrons qu'elle est surjective.
   Soit $z \in \mathbb{R}$.
   Posons $(x, y) = (1, z)$ qui est bien dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}^2$ de f.
   Alors $f(x, y) = f(1, z) = 1 \times z = z$.
   Donc il existe (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f(x, y) = z$.
   Donc f est surjective.

   Montrons que g est injective.
   Soit $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $g(x) = g(x')$.
   Alors $g(x) = (x, x^2)$ et $g(x') = (x', x'^2)$.
   On a donc $(x, x^2) = (x', x'^2)$ et en particulier leur première coordonnée est la même.
   Donc $x = x'$.
   Donc g est injective.
   Elle n'est pas surjective, car $(0, 1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ était un antécédent de $(0, 1)$, on aurait $g(x) = (x, x^2) = (0, 1)$ et donc $x = 0$ (donc $x^2 = 0$) et $x^2 = 1$:

contradiction.

La fonction $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue, strictement croissante (par étude de sa dérivée), sa limite en $-\infty$ est $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ est $+\infty$. Donc par théorème, $f \circ g$ est une bijection.

L'application $g \circ f$ n'est pas injective. En effet $(g \circ f)(1,1) = (1,1)$ et $(g \circ f)(-1,-1) = (1,1)$ donc $(1,1)$ a au moins deux antécédents.
Elle n'est pas non plus surjective, car $(0,1)$ n'a pas d'antécédent. En effet, si $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ était un antécedent, on aurait $(g \circ f)(x,y) = (xy, x^2y^2) = (0,1)$ donc $xy = 0$ (et donc $x^2y^2 = (xy)^2 = 0$) et $x^2y^2 = 1$: contradiction.

Correction (2.28)**.**

1. On étudie l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{array} \right. .$$
Elle n'est pas injective car $f(0,0) = 0 = f(1,-1)$. Montrons qu'elle est surjective.
Soit $z \in \mathbb{R}$.
Posons $(x,y) = (0,z)$ qui est bien dans l'ensemble de départ $\mathbb{R}^2$ de f.
Alors $f(x,y) = f(0,z) = 0 + z = z$.
Donc il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = z$.
Donc f est surjective.
2. On étudie l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array} \right. .$$
Étudions l'équation des antécédents $f(x,y) = (X,Y)$ où (x,y) est l'inconnue et où le couple $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$ (l'ensemble d'arrivée) est fixé.
Si $f(x,y) = (X,Y)$, alors $x + y = X$ et $x - y = Y$. En faisant la somme de ces deux égalités on obtient $2x = X + Y$ d'où $x = \frac{X+Y}{2}$. En faisant la différence des deux égalités on obtient $2y = X - Y$ d'où $y = \frac{X-Y}{2}$.
On a montré que si (x,y) était un antécédent de (X,Y), alors il y a au plus une possibilité pour (x,y) : f est donc injective.

Montrons que f est surjective. Remarque : puisque l'étude de l'injectivité nous a donné le seul antécédent possible, on n'a plus qu'à vérifier qu'il marche.
Soit $(X,Y) \in \mathbb{R}^2$.
Posons $(x,y) = (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2})$, qui est bien dans l'ensemble de départ de f.
On a $f(x,y) = f(\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}) = (\frac{X+Y}{2} + \frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2} - \frac{X-Y}{2}) = (\frac{2X}{2}, \frac{2Y}{2}) = (X,Y)$.
Donc il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x,y) = (X,Y)$.
Donc f est surjective.

Nous avons montré que f était bijective, on peut donc déterminer son application réciproque. Or cette application envoie tout élément (X,Y) dans l'ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^2$ de f sur son unique antécédent, qui a été déterminé lors de l'étude précédente. On a donc
$$f^{-1} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (X,Y) & \longmapsto & (\frac{X+Y}{2}, \frac{X-Y}{2}) \end{array} \right. .$$
3. On étudie l'application
$$f : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ A & \longmapsto & \complement_{\mathbb{N}} A \end{array} \right. .$$
Attention ! Ici les *éléments* de l'ensemble de départ et d'arrivée sont eux-même des *ensembles.* **Ne pas confondre** les éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, auxquels on peut appliquer f, et les

éléments d'une partie $A \subset \mathbb{N}$, qui n'ont rien à voir avec f. En particulier $f(1)$, $f(2)$ etc n'ont pas de sens. Par contre $f(\{1,2,3,4\})$ a du sens, mais ce n'est pas l'*image directe* de $A = \{1,2,3,4\}$ par f (car A n'est pas une partie de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, c'est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$), c'est l'*image* de l'élément A par f.

Remarquons tout d'abord que le complémentaire du complémentaire d'une partie A est cette partie A elle-même. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} x \in \complement_{\mathbb{N}}(\complement_{\mathbb{N}} A) &\iff x \notin \complement_{\mathbb{N}} A \\ &\iff \neg(x \in \complement_{\mathbb{N}} A) \\ &\iff \neg(x \notin A) \\ &\iff x \in A. \end{aligned}$$

Donc $\complement_{\mathbb{N}}(\complement_{\mathbb{N}} A) = A$.

En termes de l'application f, nous avons en fait montré que $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ (ce qu'on note aussi $f^{\circ 2} = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$). En posant $g = f$, on a bien $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ (identité de l'ensemble d'arrivée) et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}(\mathbb{N})}$ (identité de l'ensemble de départ), donc f est bijective et $f^{-1} = f$.

Pour ceux qui veulent travailler les exos abstraits, en voici quelques uns.

Exercice 1. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que :

1. Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Donner des exemples d'applications f_1, f_2, g_1, g_2 telles que :

1. $g_1 \circ f_1$ est injective et g_1 n'est pas injective.
2. $g_2 \circ f_2$ est surjective et f_2 n'est pas surjective.

Exercice 2. Soit $f : E \to F$ une application et G un ensemble. Montrer que :

1. Supposons f injective. Si $g, h : G \to E$ sont des applications telles que $f \circ g = f \circ h$, montrer que $g = h$.
2. Supposons f surjective. Si $g, h : F \to G$ sont des applications telles que $g \circ f = h \circ f$, montrer que $g = h$.

Correction 1.

1. Supposons que $g \circ f$ est injective. On veut montrer que f l'est.
   Soit $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $g(f(x)) = g(f(x'))$, c'est-à-dire $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$. Donc $x = x'$ car $g \circ f$ est injective. Donc f est injective.
2. Supposons que $g \circ f$ est surjective. On veut montrer que g l'est.
   Soit $z \in G$.
   Alors il existe $x \in E$ tel que $(g \circ f)(x) = z$ car $g \circ f$ est surjective.
   Posons $y = f(x)$, qui est bien un élément de F.
   On a $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = z$.
   Donc il existe $y \in F$ tel que $g(y) = z$.
   Donc g est surjective.

Considérons $f_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array} \right.$ et $g_1 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$. Alors g_1 n'est pas injective mais la composée $g_1 \circ f_1 = g_1|_{\mathbb{R}_+}$ l'est.

Considérons $f_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \right.$ et $g_2 : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \right.$. Alors f_2 n'est pas surjective mais la composée $g_2 \circ f_2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ l'est.

Correction 2.

1. On veut montrer $g = h$. Comme elles ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée, il suffit de comparer les images des éléments.
   Soit $x \in G$.
   On a $(f \circ g)(x) = (f \circ h)(x)$ par hypothèse, ce qui se réécrit en $f(g(x)) = f(h(x))$.
   Donc $g(x) = h(x)$ car f est injective.
   Donc $g = h$.
2. On veut montrer $g = h$. Comme elles ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée, il suffit de comparer les images des éléments.
   Soit $y \in F$.
   Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$.
   Alors $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = (h \circ f)(x) = h(f(x)) = h(y)$.
   Donc $g = h$.