Séries numériques

1 Énoncés

Exercice 1 (Centrale)**.** Déterminer la nature de la série $\sum\left(\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)^n$ en fonction du réel strictement positif α.

Exercice 2 (TPE)**.** On définit $u_n = \arctan\frac{1}{n^2+3n+3}$. Montrer que $\sum u_n$ converge et déterminer sa somme (on pourra chercher à écrire $\frac{1}{n^2+3n+3}$ sous la forme $\frac{a+b}{1-ab}$).

Exercice 3 (Mines)**.** Déterminer la convergence et calculer la somme éventuelle de la série de terme général $a\ln n + b\ln(n+1) + c\ln(n+2)$ pour $(a,b,c)\in\mathbb{C}^3$.

Exercice 4 (Mines)**.** Déterminer la nature de la série $\sum\sin\left(\pi n^3\left(\ln\frac{n}{n-1}\right)^2\right)$.

Exercice 5 (X)**.** Déterminer la nature de la série $\sum\frac{(-1)^n}{n\,\ln(n+\sin^2 n)}$.

Exercice 6 (théorème de Riemann)**.** Soient $\sum a_n$ une série réelle semi-convergente et $\alpha\in\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une permutation σ de n telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$.

Exercice 7 (Mines)**.** Soit σ une permutation de $\mathbb{N}^*$. Déterminer la nature des séries $\sum\frac{1}{n\,\sigma(n)}$ et $\sum\frac{\sigma(n)}{n^2}$. On pourra utiliser : l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une sommation d'Abel, le critère de Cauchy...

Exercice 8 (Centrale)**.** Déterminer la nature de la série $\sum\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^\alpha - (\arctan n)^\alpha\right)$ en fonction du réel α.

Exercice 9 (X)**.** Soit $f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*)$ telle que $\lim_{+\infty}\frac{f'}{f} = \ell < 0$. Déterminer la nature de la série $\sum f(n)$.

Exercice 10 (X)**.** Donner un exemple de suites u et v telles que $\sum u_n$ soit convergente, $\sum v_n$ divergente et $u\sim v$.

Exercice 11. Montrer que la série $\sum_{m\wedge n=1}\frac{1}{m^2n^2}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 12 (X)**.** On pose $f(x) = \frac{\cos\ln x}{x}$. Calculer $\int_1^n f$ puis déterminer la nature de la série $\sum f(n)$.

Exercice 13 (ENS)**.** Montrer que la série $\sum\frac{1}{p}$ diverge, où la somme porte sur les nombres premiers.

2 Corrigés

Corrigé 1. On trouve $n\ln\left(\cos\frac{1}{n^\alpha}\right)\sim\frac{-1}{2n^{2\alpha-1}}$, ce qui montre que la série converge absolument si $2\alpha-1<0$, et diverge grossièrement sinon.

Corrigé 2. La convergence est triviale, puis on a $\frac{1}{n^2+3n+3} = \frac{a+b}{1-ab}$ avec $a = n+2$ et $b = -(n+1)$. On utilise la tangente d'une somme et la série se télescope, on obtient $\frac{\pi}{4}$.

Corrigé 3. Par un développement asymptotique on obtient la convergence si et seulement si le triplet (a, b, c) est proportionnel à $(1, -2, 1)$. Par sommation télescopique on obtient $-\ln(2)$.

Corrigé 4. On trouve que le terme général s'écrit $(-1)^{n+1}\frac{11\pi}{12n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$, la série est donc semi-convergente.

Corrigé 5. Pour $x \to \infty$, on a

$$x \ln(x + \sin^2 x) = x \ln x + O(1)$$
$$\text{d'où} \quad \frac{1}{x \ln(x+\sin^2 x)} = \frac{1}{x \ln x} + O\big(\tfrac{1}{x^2}\big)$$

et la somme de deux termes consécutifs de la série vaut $\frac{1}{2n \ln(2n)} - \frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$. On trouve $\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)} = \frac{1}{2n \ln(2n)} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$ et la série est donc convergente.

Corrigé 6. Soient $A_\pm$ l'ensemble des indices où a est positive, resp. strictement négative.
- On montre que les sommes $\sum_{A_\pm} a$ sont infinies : la convergence de l'une entraîne celle (absolue) des deux.
- On construit σ par récurrence : on prend le premier indice non utilisé qui permet d'aller en direction de α. On a $a_{\sigma(n)} \to 0$.
- On prouve que σ est surjective : sinon, les termes choisis sont de signe constant à partir d'un certain rang, mais les sommes partielles forment alors une suite monotone bornée, et c'est à un nombre fini de termes près une $\sum_{A_\pm} a$.
- Les sommes partielles passent des deux côtés de α, donc passent près car $a_{\sigma(n)} \to 0$, donc restent près à cause du changement de signe.

Corrigé 7. Soit $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sigma(n)}$, on remarque que $A_n \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} = O(\log n)$. Avec une transformation d'Abel on obtient que $\sum \frac{1}{n\,\sigma(n)}$ converge. Alternativement, on peut utiliser Cauchy-Schwarz. Soit $B_n = \sum_{k=1}^n \sigma(n)$, on a $B_n \geqslant \sum_{k=1}^n n = \Theta(n^2)$. La transformation d'Abel donne la divergence de $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$. Alternativement on peut minorer $\sum_{n=N}^{2N-1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ par une constante. Remarque : on n'utilise que l'injectivité.

Corrigé 8. On trouve que le terme général vaut $\big(\frac{\pi}{2}\big)^\alpha \frac{2\alpha}{\pi n} + O\big(\frac{1}{n^2}\big)$, et la série ne converge que dans le cas trivial où $\alpha = 0$.

Corrigé 9. Pour $x \geqslant A$, on a $f'(x) \leqslant \frac{\ell}{2} f(x)$, d'où $f(x) \leqslant f(A)e^{\frac{\ell}{2}(x-A)}$ et la série est absolument convergente.

Corrigé 10. Il suffit de prendre une série semi-convergente et d'ajouter à son terme général une suite négligeable devant ledit terme général, positive mais non sommable : par exemple, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n \ln n}$.

Corrigé 11. Elle converge par majoration par $\zeta(2)^2$. Pour calculer la somme, on la multiplie par $\zeta(4)$: on trouve

$$\begin{aligned}\sum_{d, m\wedge n=1} \frac{1}{(dm)^2(dn)^2} &= \sum_{d, m\wedge n=d} \frac{1}{m^2n^2} \\ &= \sum_{m,n} \frac{1}{m^2n^2} = \zeta(2)^2\end{aligned}$$

et la somme vaut finalement $\frac{\zeta(2)^2}{\zeta(4)} = \frac{90}{6^2} = \frac{5}{2}$.

Corrigé 12. En posant $u = \ln t$ on obtient $\int_1^n f = \sin \ln n$. On fait une comparaison série-intégrale en obtenant $|f(n) - f(t)| = O(n^{-2})$ pour $t \in [n, n+1]$ par les accroissements finis, puis, en intégrant sur $[n, n+1]$, on obtient la divergence de la série.

Corrigé 13. On majore la série harmomique par un produit eulérien, puis on passe au logarithme : $\sum^N \frac{1}{n} \leqslant \prod^N (1 - p^{-1})^{-1}$ et $-\ln(1 - p^{-1}) = p^{-1} + \Theta(p^{-2})$.