Séries entières

1 Énoncés

Exercice 1 (type Mines-Ponts)**.** On considère la série entière $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \binom{2n}{n} x^n$.

1) Donner le rayon de convergence de f puis une expression simple de $f(x)$.
2) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$ pour n entier naturel.

Exercice 2 (type Mines-Ponts)**.** On définit une suite (c_n) par récurrence en posant $c_0 = 1$ et $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} c_k c_{n-k}$.

1) En admettant provisoirement que $f(x) = \sum c_n x^n$ a un rayon de convergence non nul, calculer cette série ; déterminer alors le rayon de convergence et une expression simple de c_n.
2) Montrer que c_n dénombre les triangulations d'un polygone régulier à $n+2$ côtés.

Exercice 3 (X-ESPCI)**.** Soit I_n le nombre d'involutions de $[\![1, n]\!]$.

1) Calculer I_1 et I_2, puis I_{n+2} en fonction de I_{n+1} et I_n.
2) On pose $I_0 = 1$. Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 0} \frac{I_n}{n!} x^n$. Montrer que le rayon de convergence de f est non nul.
3) Trouver une équation différentielle vérifiée par f sur son segment de convergence et la résoudre.
4) Déterminer le rayon de convergence.
5) Question subsidiaire : donner une expression explicite de I_n.

Exercice 4 (Mines-Ponts)**.** Développer en série entière $x \mapsto \arcsin^2(x)$.

Exercice 5. Soit $(a_1, \dots, a_p)$ un p-uplet d'entiers naturels non nuls et premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ à l'équation $a_1 n_1 + \cdots + a_p n_p = n$.

1) Montrer que le rayon de convergence de $\sum S_n x^n$ est supérieur à 1 et que, pour $x \in (-1, 1)$, on a
$$\sum_{n\geqslant 0} S_n x^n = \frac{1}{1 - x^{a_1}} \cdots \frac{1}{1 - x^{a_p}}.$$
2) En étudiant les pôles de cette fraction rationnelle, en donner une décomposition en éléments simples ; on n'explicitera que le coefficient du terme de plus bas degré.
3) En déduire un équivalent de S_n lorsque $n \to \infty$.

Exercice 6. Soit $f(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$. Montrer que f est DSE au voisinage de 0 avec un rayon de convergence R vérifiant $\operatorname{argcosh}(2) \leqslant R \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7. Donner le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) \frac{x^n}{n}$.

Exercice 8 (Mines-Ponts)**.** On définit une suite (a_n) par $a_0 = 1$ et $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k a_{n-k}$. Déterminer a_n.

Exercice 9. Développer en série entière $x \mapsto \frac{2x-1}{(2+x-x^2)^2}$.

Exercice 10 (CCP). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $S_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.

a) Donner $\lim_{n\to\infty} S_n$.

b) Montrer que pour tout n, on a $\ln(2n+1) \leqslant S_n \leqslant 1 + \ln(2n)$.

c) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} S_n$ converge.

d) On pose $f : x \mapsto \sum_{n\geqslant 1} (-1)^{n+1} S_n\, x^{2n}$. Montrer que f est bien définie sur $I = (-1, 1)$ et que sur I on a $(1+x^2)f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + x \arctan x$.

2 Corrigés

Corrigé 1. La formule de Stirling (ou le critère de d'Alembert) montre que le rayon de convergence est exactement $\frac{1}{4}$. De plus, en écrivant $\binom{2(n+1)}{n+1} = 2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}$, on voit que f vérifie $f' = 4xf' + 2f$, d'où $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$ en considérant sa valeur en 1. En prenant un carré de Cauchy, on trouve que la somme demandée vaut 2^{2n}.

Corrigé 2. Par définition, on a $f(x)^2 = \frac{f(x)-1}{x}$. Par un argument de continuité, on en déduit que $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$, ce qui montre que le rayon de convergence vaut $\frac{1}{4}$ et conduit finalement à $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Pour la dernière question, on fixe un segment d'un tel polygone, et on partitionne les triangulations en fonction de l'unique sommet auquel est relié le segment, ce qui donne la formule de récurrence.

Corrigé 3. On trouve $I_{n+2} = I_{n+1} + (n+1)I_n$ en partitionnant selon l'image d'un élément quelconque. On utilise $I_n \leqslant n!$. La relation de récurrence donne $f' = (1+x)f$, d'où $f(x) = \exp(x + \frac{x^2}{2})$. Le rayon de convergence est donc infini.

Corrigé 4. En dérivant deux fois on trouve $(1-x^2)f'' = 2 + xf'$. On écrit la récurrence correspondante $(n+1)(n+2)a_{n+2} = n^2 a_n$ et on la résout en notant que les termes pairs sont nuls par parité : $a_{2n} = \frac{2^{2n-1}(n-1)!^2}{(2n)!}$.

Corrigé 5. Pour la première question, il suffit de développer en série entière le produit de droite. Les pôles sont des éléments de $\mathbb{U}_{a_1\cdots a_p}$; le pôle 1 est de multiplicité p (c'est un pôle simple de chacun des termes du produit), et les autres sont de multiplicité inférieure à $p-1$: pour le voir, on suppose qu'un pôle ζ est de multiplicité p, c'est-à-dire que c'est un zéro commun à tous les $X^{a_j}-1$; en écrivant une relation de Bézout entre les a_j, on obtient $\zeta = 1$.

On peut donc écrire

$$\sum_{n\geqslant 0} S_n x^n = \frac{\alpha}{(1-x)^p} + \sum_{\zeta\in\mathbb{U}_{a_1\cdots a_p}} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\alpha_{\zeta,j}}{(\zeta-x)^j}$$

où α et les $\alpha_{\zeta,j}$ sont des constantes. En multipliant par $(1-x)^p$ et en évaluant en 1, on trouve $\alpha = \frac{1}{a_1\cdots a_p}$. Ensuite, on écrit

$$\frac{1}{(\zeta-x)^j} = \zeta^{-j}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-j}{n}(-\zeta^{-1}x)^n = \zeta^{-j}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{j+n-1}{j-1}\zeta^{-n}x^n$$

ce qui donne finalement $S_n = \alpha\binom{p+n-1}{p-1} + O(n^{p-2}) \sim \frac{1}{a_1\cdots a_p}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$.

Corrigé 6. On suppose d'abord que $f(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^{2n}$. On écrit alors $\cosh(x)f(x) = 1$ qui donne $a_0 = 1$ et $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{(2k)!}$. Pour minorer le rayon de convergence, on prend $r, K \in \mathbb{R}$ et on essaie de faire passer $|a_n r^{2n}| \leqslant K$ à la récurrence. En utilisant la récurrence on trouve $|a_n r^{2n}| \leqslant K\sum_{k=1}^{n}\frac{r^{2k}}{(2k)!} \leqslant K(\cosh(r)-1)$, qui passe à la récurrence dès que $\cosh(r) \leqslant 2$. Puisque le rayon est non nul, la récurrence sur les coefficients montre en retour que c'est bien le développement en série entière de f. Pour majorer le rayon de convergence, on observe que pour tout $r < R$, la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n (ir)^{2n}$ converge, mais c'est la série de $\frac{1}{\cos(r)}$ et donc elle diverge en $\frac{\pi}{2}$.

Corrigé 7. Pour le rayon de convergence, on regroupe les termes trois par trois, ce qui donne en général un terme équivalent à $\frac{(2-x-x^2)\,x^{3n}}{6n}$. Le rayon de convergence est donc exactement 1. Pour la somme, on peut dériver ou regrouper les termes en écrivant $1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}$, ce qui donne finalement $\frac{-1}{2}\ln(1+x+x^2)$.

Corrigé 8. L'idée est d'écrire $\frac{a_{n+1}}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!}\frac{a_{n-k}}{(n-k)!}$. On pourrait montrer directement par récurrence que $a_n = n!$; faisons-le à l'aide d'une série entière. On pose $f = \sum a_n \frac{x^n}{n!}$. Alors la relation de récurrence, on a $f^2 = f'$ d'où $f = \frac{1}{1-x}$ et la valeur de a_n.

Corrigé 9. On pourrait directement décomposer en éléments simples, mais on peut aussi remarquer qu'il s'agit de la dérivée de $\frac{-1}{x^2-x-2}$. Or $x^2-x-2 = (x+1)(x-2)$, et $\frac{1}{x^2-x-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{x+1} + \frac{1}{x-2}\right)$. Le développement en série entière suit. On obtient

$$\frac{1}{12}\sum_{n\geqslant 0}(2^{-n} - 4(-1)^n)(n+1)x^n.$$

Corrigé 10.

a) Il est classique (en considérant $S_{2n} - S_n$) que $\lim S_n = +\infty$.

b) On écrit $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$, d'où le résultat.

c) On encadre la série entre deux séries qui sont alternées à partir d'un certain rang.

d) On utilise l'équivalent de la question (b) et le fait que $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$.