Réduction

Questions de cours

- Lemme des noyaux.
- Existence d'un polynôme annulateur.
- Si u et v commutent, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

1 Énoncés

Exercice 1. Soient A, B et C trois matrices avec A et C carrées et diagonalisables ; on suppose que A et C n'ont pas de valeur propre en commun. Montrer que la matrice par blocs $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right)$ est diagonalisable.

Exercice 2. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que les u_i sont diagonalisables et commutent. Montrer qu'ils sont simultanément diagonalisables.

Exercice 3 (Mines 2009)**.** Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u = 0$. Montrer que le rang de u est pair.

Exercice 4 (Mines 2009)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, et soit $\Phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto AM - MA$. Montrer que Φ est diagonalisable.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Déterminer la dimension du commutant de A.

Exercice 6 (Mines 2009)**.** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est diagonalisable.

a) On suppose qu'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $MA = BM$. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.

b) Même question s'il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AM = MB$.

Exercice 7 (Mines 2008)**.** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AB et BA ont même polynôme caractéristique.

Exercice 8 (Mines 2008)**.** Déterminer l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $M^5 = M^2$ et $\mathrm{Tr}(M) = n$.

2 Corrigés

Corrigé 1. On prend P et Q scindés à racines simples, annulant respectivement A et C, puis on écrit que $PQ(M) = P(M)Q(M) = 0$.

Corrigé 2. On fait une récurrence sur la dimension en distinguant selon que toutes sont des homothéties ou pas, et en utilisant qu'un endomorphisme qui commute avec un autre stabilise ses espaces propres.

Corrigé 3. On factorise $x^3 + x = (x^2 + 1)x$, on diagonalise u sur $\mathbb{C}$, on regroupe les valeurs propres par conjugués et on utilise que le rang sur $\mathbb{C}$ est le même que celui sur $\mathbb{R}$.

Corrigé 4. On prend une base X_i de vecteurs propres pour A et une base Y_j de vecteurs propres pour sa transposée, alors $X_i\,{}^tY_j$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (car génératrice puisqu'on atteint les $E_{i,j} = e_i\,{}^te_j$ et de bon cardinal), propre pour Φ.

Corrigé 5. En diagonalisant on montre que les matrices qui commutent sont exactement celles qui stabilisent tous les espaces propres, d'où la dimension du commutant qui est la somme des carrés des dimensions des espaces propres.

Corrigé 6.

a) Dans une base de vecteurs propres pour A, il y en a un qui n'est pas annulé par M. Il est alors propre pour B de même valeur propre.

b) Une matrice et sa transposée ont le même spectre.

Corrigé 7. C'est vrai lorsque l'une est inversible (conjuguer). C'est vrai lorsque l'une est une J_r par calcul par blocs. On en déduit le résultat par l'expression sous la forme PJ_rQ.

Corrigé 8. On va montrer que c'est l'identité, et ce même parmi les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On factorise $x^5 - x^2 = (x^3 - 1)x^2$ et on trigonalise la matrice. Les coefficients diagonaux ne peuvent être que $1, j, j^2$ ou 0, et la seule somme de n nombres parmi ceux-là qui vaille n est composée seulement de 1. Cela montre que la seule valeur propre de M est 1, qui a une multiplicité 1 dans un polynôme annulateur, donc $M = 1$.