Oraux blancs

1 Exercices longs

1.1 CCP

Exercice 1. Soient $(a_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$.

1) Montrer que (u_n) est bien définie et croissante.
2) On suppose que $a_n = 1$ pour tout entier n.
   a) Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$.
   b) Montrer que pour tout entier n, $u_n^2 = u_0^2 + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} + 2n$ et en déduire que
$$\sqrt{2n} \leqslant u_n \leqslant \sqrt{u_0^2 + \tfrac{1}{u_0^2} + \tfrac{5}{2}\,n}.$$
3) Montrer que (u_n) converge si et seulement si la série de terme général a_n converge.
4) On suppose que $a_n = \frac{1}{3^n}$ pour tout entier n.
   a) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.
   b) Montrer que $\ell^2 - u_n^2 \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{3^{n-1}}$.

Exercice 2. Soit $x \in\,]-1, 1[$. On pose $f_x : \theta \in \mathbb{R} \mapsto \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}\, x^n$.

1) Montrer que f_x est continue sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_x(0)$ et $f_x(\pi)$.
2) Montrer que f_x est dérivable et que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f_x'(\theta) = \frac{-x\sin\theta}{1-2\,x\cos\theta+x^2}$. En déduire la valeur de $f_x(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.
3) Calculer $\int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1 - 2\,x\cos\theta + x^2)\,\mathrm{d}\theta$.
4) En déduire, pour $y \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, la valeur de $\int_{-\pi}^{+\pi} \ln(1 - 2\,y\cos\theta + y^2)\,\mathrm{d}\theta$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. On suppose que f est diagonalisable et possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

1) Montrer que tout vecteur propre de f est vecteur propre de g.
2) En déduire qu'il existe une base commune de vecteurs propres pour f et g.
3) Montrer qu'il existe un unique n-uplet $(a_0, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g = a_0 + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1}$.
4) Déterminer la dimension du commutant de f.

Exercice 4. On définit $\varphi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ par $\varphi(M) = 2M + {}^tM$ pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Montrer que $\varphi^2 = 4\varphi - 3\,\mathrm{id}$. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?
2) Déterminer les valeurs propres, les sous-espaces propres, la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de φ.
3) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $\varphi_{a,b} : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto aM + b\,{}^tM$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_{a,b}$ soit inversible.
4) Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}({}^tMN)$ pour $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ est-il symétrique pour ce produit scalaire ?

1.2 Centrale

Exercice 5. Soit $f : x \mapsto \int_0^{\infty} \frac{1}{1+t} \exp(\frac{-t}{|x|}) \, \mathrm{d}t$.

1) Déterminer le domaine de définition de f. Est-elle continue ?
2) Montrer que f se prolonge par continuité en 0.
3) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\mathbb{R}^*$.
4) Donner les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E) : $x^2 y' + y = |x|$.
5) Quelles sont les solutions de (E) définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6.

1) Soit E un espace euclidien de dimension $2n$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ antisymétrique.
   a) Montrer que f^2 est diagonalisable.
   b) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$.
   c) Soit a un vecteur propre de f^2 associé à une valeur propre non nulle. Montrer que le plan $F = \operatorname{Vect}(a, f(a))$ est stable par f. Que dire de l'orthogonal de F ?
2) Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A = {}^tP \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} P$.

1.3 Mines

Exercice 7. Pour $n \geqslant 1$ entier on pose $a_n = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

1) Justifier l'existence de a_n pour tout n.
2) Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.
3) Soit f la somme de cette série entière. Exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 8. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, $A^2 = I_n$.

1) Montrer que G est commutatif.
2) Montrer qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $A \in G$, PAP^{-1} est diagonale.
3) Montrer que G est fini et donner un majorant de son cardinal.

1.4 Autres écoles

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, telle que $f(0,0) = 0$ et que $\partial_y f > |\partial_x f|$. On pose

$$\begin{aligned} g &: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,x), \\ h &: x \in \mathbb{R} \mapsto f(x,-x) \\ \text{et } k_x &: y \in \mathbb{R} \mapsto f(x,y). \end{aligned}$$

1) Donner les dérivées de ces fonctions.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R},\ f(x,y) = 0$. On note $y = t(x)$.
3) Montrer que t est 1-lipschitzienne.

Exercice 10. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}) \mid \det A = \pm 1\}$.

1) Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On en fixe un sous-groupe fini G.
2) Montrer que pour toute matrice $A \in G$, il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^m = I_n$.
3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, scindé à racines simples et dont toutes les racines sont de module strictement inférieur à 1, tel que $P(A) = 0$. Montrer que $A = 0$.
4) Soit $p \geqslant 3$ un entier. On suppose que $A \in G$ s'écrit $A = I_n + pM$ avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$. Montrer que M est nécessairement nulle.

Exercice 11. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{d}$ le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-d+1)}{d!}$. On note aussi Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui envoie P sur $P(X+1) - P(X)$.

1) Calculer $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\Delta\binom{X}{d}$ pour tout entier d.
2) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un $(d+1)$-uplet $(c_d, \dots, c_0)$ d'entiers tel que $P = c_d\binom{X}{d} + \cdots + c_0\binom{X}{0}$.
3) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 12. On fixe un espace vectoriel E de dimension finie. Si $f \in \mathcal{L}(E)$, on note ad_f l'endomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ qui envoie g sur $fg - gf$.

1) Si f et g sont dans $\mathcal{L}(E)$ et $n \geqslant 0$ un entier, exprimer $\mathrm{ad}_f^n(g)$ en fonction des puissances successives de f et g.
2) Montrer que, si f est nilpotent d'indice n, alors ad_f est nilpotent d'indice au plus $2n-1$.
3) Montrer que, pour tout $a \in \mathcal{L}(E)$, il existe $b \in \mathcal{L}(E)$ tel que $aba = a$.
4) Montrer que, si f est nilpotent d'indice n, alors ad_f est nilpotent d'indice exactement $2n-1$.

2 Exercices courts

2.1 CCP

Exercice 13. Donner un équivalent de $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln^2 k$.

Exercice 14. Justifier l'existence de $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Exprimer I comme somme d'une série.

Exercice 15. Déterminer pour quels $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Exercice 16. Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^p = I_n$. Montrer que $M^2 = I_n$. Que dire si $M \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$?

2.2 Centrale

Exercice 17. Soit $r > 0$ et (a_n) la suite définie par $a_n = r^{\sqrt{n}}$ si n est le carré d'un entier et $a_n = 0$ sinon. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

Exercice 18. Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables ?

2.3 Mines

Exercice 19. Soit $f : x \mapsto |\sin x|^x$. Montrer que f est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^+$, puis étudier son intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 20. Soit f l'application qui à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R},\ Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ puis calculer son déterminant.

3 Corrigés

Corrigé 1.

1) On montre par récurrence sur n que u_n est bien défini, strictement positif ; le seul argument est la positivité de a_n. Cela implique trivialement la croissance, encore une fois par positivité de a.

2) a) La récurrence est de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$. Comme u est croissante, elle converge ou tend vers $+\infty$. Mais si elle convergeait ce serait vers un point fixe de f, c'est-à-dire un zéro de $x \mapsto \frac{1}{x}$, ce qui n'existe pas.

   b) On somme la relation $u_{n+1}^2 = u_n^2 + 2 + \frac{1}{u_n^2}$. La première inégalité est une conséquence immédiate de la positivité de u. On en déduit

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{u_k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2k} \leqslant \frac{n}{2}.$$

   C'est exactement la majoration demandée.

3) La suite u étant croissante, elle converge si et seulement si elle est majorée. Supposons que la série de terme général a_n converge. Alors en sommant la relation de récurrence pour k allant de 0 à n on a

$$u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{u_k} \leqslant u_0 + \frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant u_0 + \frac{1}{u_0} \sum_{k=0}^{\infty} a_k.$$

   Réciproquement, si u_n converge vers une limite ℓ, alors la série de terme général $u_{n+1} - u_n = \frac{a_n}{u_n}$ est convergente et on a $\frac{a_n}{u_n} \sim \frac{a_n}{\ell} > 0$, donc la série de terme général a_n, étant de même nature, converge. (Alternativement, on peut se contenter d'utiliser le fait que (a_n) est minorée par un réel strictement positif.)

4) a) La série géométrique converge, donc u aussi d'après la question précédente.

   b) On a $u_{k+1}^2 - u_k^2 = 2 \cdot 3^{-k} + \frac{1}{3^{2k} u_k^2}$. On somme cette égalité pour k entre n et l'infini, ce qui est légitime car tout converge. On obtient

$$\ell^2 - u_n^2 = 2\frac{3^{-n}}{1 - 3^{-1}} + O(9^{-n}) \sim 3^{1-n}.$$

Corrigé 2.

1) La série converge normalement car $|\cos| \leqslant 1$, la somme est donc continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$f_x(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x) \text{ et } f_x(\pi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n} = -\ln(1+x).$$

2) Formellement on a $f_x'(\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\theta) x^n$. Cette série converge normalement, donc f_x est dérivable et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ on a l'égalité précédente. On en déduit

$$\begin{aligned}
f_x'(\theta) &= -\operatorname{Im}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} e^{in\theta} x^n\Big) \\
&= -\operatorname{Im}\Big(\sum_{n=1}^{\infty} (xe^{i\theta})^n\Big) \\
&= -\operatorname{Im}\Big(\frac{xe^{i\theta}}{1 - xe^{i\theta}}\Big) \\
&= -\operatorname{Im}\Big(\frac{xe^{i\theta}(1 - xe^{-i\theta})}{1 - 2x\cos\theta + x^2}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\operatorname{Im}\Big(\frac{xe^{i\theta}-x^2}{1-2x\cos\theta+x^2}\Big)\\
&= \frac{-x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}.
\end{aligned}
$$

On obtient la valeur de f_x en calculant une primitive. On pose $u=\cos\theta$ dans l'expression :

$$
\begin{aligned}
\int \frac{-x\sin\theta}{1-2x\cos\theta+x^2}\,\mathrm{d}\theta &= \int \frac{x\,\mathrm{d}u}{1-2xu+x^2}\\
&= -\tfrac{1}{2}\ln(1-2xu+x^2)\\
&= -\tfrac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2).
\end{aligned}
$$

En $\theta=0$, cette primitive vaut $-\frac{1}{2}\ln(1-2x+x^2)=-\ln(1-x)=f_x(0)$ donc pour tout $\theta\in\mathbb{R}$,

$$f_x(\theta)=-\tfrac{1}{2}\ln(1-2x\cos\theta+x^2).$$

3) Puisque $|x|<1$, la question précédente permet d'écrire

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi}\ln(1-2\,x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta &= -2\int_{-\pi}^{+\pi} f_x(\theta)\,\mathrm{d}\theta\\
&= -2\int_{-\pi}^{+\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\theta)}{n}\,x^n\,\mathrm{d}\theta\\
&= -2\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(n\theta)}{n}\,x^n\,\mathrm{d}\theta\\
&= 0
\end{aligned}
$$

toutes les intégrales individuelles étant nulles.

4) Il suffit de poser $x=\frac{1}{y}$ ce qui permet de se ramener à la question précédente : on aura en effet

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{+\pi}\ln(1-2\,y\cos\theta+y^2)\,\mathrm{d}\theta &= 2\pi\ln(y^2)+\int_{-\pi}^{+\pi}\ln(1-2\,x\cos\theta+x^2)\,\mathrm{d}\theta\\
&= 4\pi\ln|y|.
\end{aligned}
$$

Corrigé 3.

1) Par la relation de commutation, g stabilise les sous-espaces propres de f, qui sont des droites par l'hypothèse sur les valeurs propres.
2) Il suffit de prendre une base quelconque diagonalisant f.
3) Dans cette base, f s'écrit matriciellement $\operatorname{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, tandis que g s'écrit $\operatorname{diag}(\mu_1,\dots,\mu_n)$ pour certains réels μ_i. La condition demandée se traduit par l'existence d'un polynôme P de degré inférieur à $n-1$ tel que $P(\lambda_i)=\mu_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$; les λ_i étant supposés distincts, l'existence et l'unicité d'un tel polynôme est assurée indifféremment par les polynômes interpolateurs de Lagrange, par l'injectivité de l'application linéaire $\mathbb{R}_{n-1}[X]\to\mathbb{R}^n$ d'évaluation en les λ_i ou par un déterminant de Vandermonde.

Corrigé 4.

1) On écrit :

$$
\begin{aligned}
\varphi^2(M) &= \varphi(2M+{}^tM)\\
&= 2\,(2M+{}^tM)+{}^t(2M+{}^tM)\\
&= (4+1)\,M+(2+2)\,{}^tM\\
&= 4\,({}^tM+2\,M)-3\,M
\end{aligned}
$$

d'où l'identité voulue. Le polynôme $X^2-4\,X+3$ étant scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ (c'est $(X-1)(X-3)$), l'endomorphisme considéré est donc diagonalisable.

2) Comme déjà vu, les valeurs propres de φ sont à chercher dans $\{1,3\}$.
   - Valeur propre 1 : on cherche les M tels que $2M + {}^tM = M$. Il s'agit des matrices antisymétriques, sous-espace de dimension $\frac{n\,(n-1)}{2}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (il suffit de se donner les coefficients strictement au-dessus de la diagonale).
   - Valeur propre 3 : il s'agit cette fois-ci des matrices symétriques, formant un sous-espace de dimension $\frac{n\,(n+1)}{2}$.

   On en déduit que :
   - La trace de φ vaut $\frac{n\,(n-1)}{2}\cdot 1 + \frac{n\,(n+1)}{2}\cdot 3 = n\,(2n+1)$.
   - Son déterminant vaut $1^{\frac{n\,(n-1)}{2}}3^{\frac{n\,(n+1)}{2}} = 3^{\frac{n\,(n+1)}{2}}$.
   - Son polynôme caractéristique vaut $(X-1)^{\frac{n\,(n-1)}{2}}(X-3)^{\frac{n\,(n+1)}{2}}$.
3) On a $\varphi_{a,b} = b\,\varphi + (a-2b)\,\mathrm{id}$, et donc

$$\begin{aligned}\det\varphi_{a,b} &= (-b)^{n^2}\chi_\varphi\big(\tfrac{2b-a}{b}\big)\\ &= (-b)^{n^2}\big(\tfrac{2b-a}{b}-1\big)^{\frac{n\,(n-1)}{2}}\big(\tfrac{2b-a}{b}-3\big)^{\frac{n\,(n+1)}{2}}\\ &= (a-b)^{\frac{n\,(n-1)}{2}}(a+b)^{\frac{n\,(n+1)}{2}}\end{aligned}$$

   même quand $b=0$. Quand $n=0$, l'endomorphisme $\varphi_{a,b}$ est toujours inversible. Quand $n=1$, on a $\varphi_{a,b} = (a+b)\,\mathrm{id}$, inversible si et seulement si $a+b\neq 0$. Quand $n\geqslant 2$, l'inversibilité est équivalente à la condition $a^2\neq b^2$.
4) Calculons :

$$\begin{aligned}\langle\varphi(M),N\rangle &= \mathrm{Tr}(\,{}^t(2M+{}^tM)\,N)\\ &= \mathrm{Tr}(MN) + 2\,\langle M,N\rangle\end{aligned}$$

   ce qui est visiblement symétrique ; par conséquent φ l'est aussi, ainsi que $\varphi_{a,b}$ pour tout (a,b) par linéarité. (Alternativement : on a diagonalisé φ dans une base orthogonale, les matrices symétriques étant orthogonales aux antisymétriques.)

Corrigé 5.

1) L'intégrale converge pour tout x non nul puisque $\frac{1}{1+t}\exp(\frac{-t}{|x|}) = O(t^{-2})$ quand $t\to+\infty$ et que l'intégrande se prolonge par continuité en zéro. Elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ puisqu'elle l'est sur tout segment (théorème de continuité sous le signe intégral). Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^*$ par parité.
2) On applique le théorème de convergence dominée : quand $x\to 0$ avec $|x|\leqslant 1$, on a la majoration $\frac{1}{1+t}\exp(\frac{-t}{|x|})\leqslant\frac{1}{1+t}\exp(-t)$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, f est prolongeable en zéro, de limite nulle.
3) Il suffit de raisonner sur $\mathbb{R}_+^*$ par parité. On a par récurrence

$$\partial_x^n\exp(\tfrac{-t}{x}) = P_n(t,\tfrac{1}{x})\,\exp(\tfrac{-t}{x})$$

   où $P_n\in\mathbb{Q}[T,U]$ est un polynôme défini par la relation de récurrence $P_{n+1} = U^2\,(t-\partial_U)P_n$. Par conséquent, quand x varie dans un segment fixé, on peut borner $\partial_x^n\exp(\frac{-t}{x})$ par une fonction intégrable indépendante de x. Le théorème de régularité sous le signe intégral conclut.
4) On cherche évidemment une solution particulière à partir de f. La question précédente permet de dériver f sous le signe intégral, et on a

$$\begin{aligned}x^2f'(x)+f(x) &= \int_0^\infty\big(x^2\partial_x\big(\tfrac{1}{1+t}\exp(\tfrac{-t}{x})\big)+\tfrac{1}{1+t}\exp(\tfrac{-t}{x})\big)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^\infty\exp(\tfrac{-t}{x})\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-x\,\exp(\tfrac{-t}{x})\right]_{t=0}^{\infty}\\
&= x
\end{aligned}
$$

comme de bien entendu. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto A\,\exp(\frac{1}{x})$, et les solutions générales de l'équation avec second membre sont donc de la forme

$$x \mapsto f(x) + A\,\exp(\tfrac{1}{x})$$

pour $A \in \mathbb{C}$.

5) Soit g une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$. Le même raisonnement que ci-dessus appliqué cette fois sur $\mathbb{R}^-$ montre que g est de la forme

$$x \mapsto f(x) + \begin{cases} A_+\,\exp(\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ A_-\,\exp(\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

pour deux constantes complexes A_+ et A_-. Reste à déterminer quelles solutions sont continues et dérivables en 0. Commençons par f. On a vu qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, montrons qu'elle est dérivable en 0, de dérivée nulle. Par parité il suffit de le montrer à droite de 0. Pour cela on étudie le taux d'accroissement $\frac{f(x)}{x}$. Soit $g_t : x \mapsto \frac{\exp(-t/x)}{x}$, qu'on veut majorer indépendamment de x pour utiliser une convergence dominée. On calcule $g_t'(x) = \left(\frac{-1}{x^2} + \frac{t}{x^3}\right)\exp(-t/x)$, qui s'annule en $x = t$. On a donc $g_t(x) \leqslant g_t(t) = \frac{1}{t}$. De plus pour $(x,t) \in [0,1]^2$, $\frac{\exp(-t/x)}{x(1+t)}$ est bornée par une constante. Finalement, $\frac{\exp(-t/x)}{x(1+t)}$ est bornée par une constante pour $t \in [0,1]$, et par $\frac{1}{t(1+t)}$ sur $[1,\infty]$, ce qui est intégrable. Par convergence dominée, $\frac{f(x)}{x}$ tend bien vers 0 en 0. Il suffit maintenant d'étudier les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$. La prolongeabilité à droite impose $A_+ = 0$, et ni la continuité, ni la dérivabilité n'imposent de condition sur A_-. Les solutions sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto f(x) + \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ A_-\,\exp(\frac{1}{x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Corrigé 6.

1)

a) On a ${}^t(f^2) = ({}^tf)^2 = (-f)^2 = f^2$, donc f est symétrique réel, donc diagonalisable en base orthonormée.

b) On écrit

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Ker} f^2 &\subset \{x \mid \langle f^2(x), x\rangle = 0\}\\
&= \{x \mid \langle f(x), {}^tf(x)\rangle = 0\}\\
&= \{x \mid \langle f(x), f(x)\rangle = 0\}\\
&= \operatorname{Ker} f
\end{aligned}
$$

et l'autre inclusion est automatique.

c) La stabilité est évidente (regarder les images par f de la famille génératrice). Notons qu'il s'agit bien d'un plan : en effet, a est non nul (c'est un vecteur propre), donc $f(a)$ aussi (sinon $f^2(a)$ serait nul ce qui serait contraire aux hypothèses) ; or $f(a)$ ne peut être proportionnel à a que si $f(a) = 0$, car f devrait induire un endomorphisme antisymétrique (et donc nul) sur la droite $\mathbb{R}\,a$.

Par ailleurs, l'orthogonal de F est lui aussi stable par f : si $x \in F^\perp$ et $y \in F$, on aura

$$
\begin{aligned}
\langle f(x), y\rangle &= -\langle x, f(y)\rangle\\
&= 0
\end{aligned}
$$

puisque $f(y) \in F$, et donc $f(x) \in F^\perp$.

2) La question précédente permet de conjuguer orthogonalement A à une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont soit nuls, soit de taille 2 et de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$. Ces réels a peuvent de plus être choisis positifs. Mais en écrivant

$$\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} = {}^t(\sqrt{a} I_2) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\sqrt{a} I_2)$$

on voit que l'on peut trouver une matrice P inversible et telle que ${}^tPAP$ soit diagonale par blocs avec des blocs de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il ne reste plus qu'à conjuguer par une matrice de permutation pour obtenir la forme demandée.

Corrigé 7.

1) On a $\frac{1}{(1+t^3)^n} \leqslant \frac{1}{1+t^3} = O(t^{-2})$, d'où l'intégrabilité.

2) On commence par un calcul formel, dans lequel on justifiera ensuite les convergences.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{x^n \,\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} \\ &= \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1+t^3)^n} \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} \frac{x}{1+t^3-x} \,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pour $0 < x < 1$, la dernière intégrale converge. Comme tout est positif, cela justifie l'interversion. Le rayon de convergence est donc au moins 1. Mais la dernière expression tend vers l'infini quand x tend vers 1, donc le rayon de convergence vaut 1 : si le rayon était strictement plus grand, 1 serait dans le disque ouvert de convergence et donc la somme de la série serait continue en 1.

3) On intervertit série et intégrale, ce qui donne

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{\infty} \mathrm{d}t \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x}{1+t^3}\Big)^n \\ &= \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\frac{1+t^3}{x} - 1} \\ &= \frac{x}{1-x} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + \frac{t^3}{1-x}} \\ &= \frac{x}{1-x} \int_0^{\infty} \frac{\sqrt[3]{1-x}\,\mathrm{d}u}{1+u^3} \\ &= x\,(1-x)^{-2/3} \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3}. \end{aligned}$$

La décomposition en éléments simples donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+u^3} &= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+u} - \frac{u-2}{1-u+u^2}\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2}\frac{2u-1}{1-u+u^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{1-u+u^2}\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2}\frac{2u-1}{1-u+u^2} + \frac{3}{2}\frac{1}{(u-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}\Big) \\ &= \frac{1}{3}\Big(\frac{1}{1+u} - \frac{1}{2}\frac{2u-1}{1-u+u^2} + \sqrt{3}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+\frac{4}{3}(u-\frac{1}{2})^2}\Big) \end{aligned}$$

On en tire finalement que

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} &= \frac{1}{3}\Big(\ln(1+u) - \frac{1}{2}\ln(1-u+u^2) + \sqrt{3}\arctan(\tfrac{2}{\sqrt{3}}(u-\tfrac{1}{2}))\Big)\\
&= \tfrac{1}{6}\ln\tfrac{(1+u)^2}{(1-u+u^2)} + \tfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\tfrac{2}{\sqrt{3}}(u-\tfrac{1}{2}))\\
\text{et}\qquad \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}u}{1+u^3} &= \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{6}\Big)\\
&= \frac{2\,\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{f(x) = \tfrac{2\,\pi}{3\sqrt{3}}\, x\,(1-x)^{-2/3}.}$$

Corrigé 8.

1) Il suffit d'écrire
$$AB = A(ABAB)B = (AA)BA(BB) = BA.$$

2) On procède par récurrence sur n. Si $n \leqslant 1$, c'est évident. Sinon, on distingue les cas selon que les éléments de G sont tous des homothéties ou non. Dans le premier cas, il n'y a rien à faire. Dans le second, on choisit un élément $A \in G$ qui ne soit pas une homothétie ; elle est diagonalisable (X^2-1 étant scindé à racines simples), donc décompose $\mathbb{R}^n$ en une somme directe de deux sous-espaces stricts, qui sont tous stabilisés par G par commutativité. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux deux sous-groupes obtenus.

3) On vient de montrer que G est un sous-groupe du groupe des matrices diagonales inversibles de la forme $\operatorname{diag}(\pm1,\dots,\pm1)$ (par caractérisation des racines carrées de l'unité réelles). Ce groupe est de cardinal 2^n, ce qui majore donc le cardinal de G. (Le théorème de Lagrange permet même d'affirmer que le cardinal de G est de la forme 2^m avec $m \leqslant n$.)

Corrigé 9. Se rapporter à la figure 1 page suivante.

1) On trouve immédiatement
$$\begin{aligned}
g' &= (\partial_x + \partial_y)f > 0,\\
h' &= (\partial_x - \partial_y)f < 0 \text{ et}\\
k'_x &= \partial_y f > 0.
\end{aligned}$$

2) Il suffit d'appliquer les calculs précédents pour déterminer le comportement de f sur les deux bissectrices et la droite verticale, et d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

3) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$; on a $f(x_0, t(x_0)) = 0$. Posons $g_{x_0} : x \mapsto f(x_0 + x, t(x_0) + x)$ et $h_{x_0} : x \mapsto f(x_0 + x, t(x_0) - x)$. Là encore, les deux applications sont strictement monotones, et il suffit de refaire le raisonnement de la question précédente pour localiser le graphe de t dans le cône de sommet $(x_0, t(x_0))$ et d'ouverture $\frac{\pi}{4}$.

Corrigé 10.

1) La suite des puissances de A varie dans G qui est fini, il existe donc deux entiers distincts m_1 et m_2 tels que $A^{m_1} = A^{m_2}$, et il suffit de poser $m = |m_1 - m_2|$.

2) L'hypothèse implique que A est diagonalisable à valeurs propres de module strictement inférieur à 1. Pour une norme matricielle adaptée à la base de diagonalisation, la suite (A^m) tend donc vers zéro. C'est donc aussi le cas pour la norme usuelle par équivalence des normes ; or les puissances de A sont à coefficients entiers. C'est donc qu'on a $A^m = 0$ pour m assez grand, donc par diagonalisabilité $A = 0$.

3) Par la première question, il existe $m \geqslant 1$ tel que $A^m = 1$, ce qui se réécrit $(1+pM)^m - 1 = 0$. Or les racines de $(1+pX)^m - 1$ sont les $\frac{\omega-1}{p}$ avec ω racine m-ième de l'unité, et sont donc de module strictement inférieur à 1 puisque $p \geqslant 3$. La question précédente montre alors que $M = 0$.

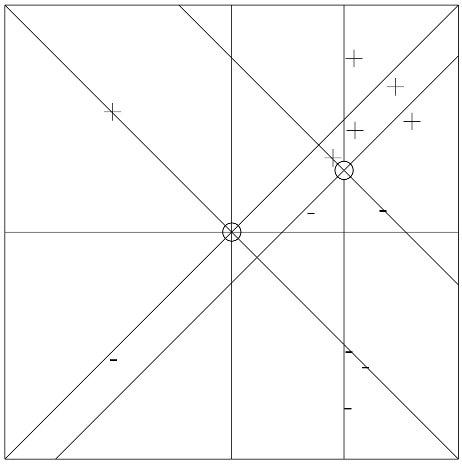

Figure 1 – Signes le long des droites

Corrigé 11.

1) On trouve sans peine que $\operatorname{Ker}\Delta = \mathbb{R}\binom{X}{0} = \mathbb{R}$ et que $\Delta\binom{X}{d} = \binom{X}{d-1}$ pour $d \geqslant 1$.
2) On procède par récurrence sur d ; c'est clair si $d = 0$. Sinon, $\Delta(P)$ vérifie la même hypothèse, donc s'écrit $c_d\binom{X}{d-1} + \cdots c_1\binom{X}{0} = \Delta(c_d\binom{X}{d} + \cdots c_1\binom{X}{1})$. Par la première question, la différence est constante et vaut $P(0) \in \mathbb{Z}$.
3) Il est alors clair que cet ensemble est $\sum_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\binom{X}{d}$ (il ne reste plus que l'inclusion réciproque à vérifier, ce qui revient à prouver que $\binom{X}{d}$ est à valeurs entières pour tout d, en distinguant selon le signe de la variable).

Corrigé 12.

1) On trouve par récurrence que $\operatorname{ad}_f^m(g) = \sum\limits_{k=0}^{m} \binom{m}{k}(-1)^{m-k} f^k g\, f^{m-k}$.
2) Dans la somme ci-dessus, f^k ou f^{m-k} est nul dès que k ou $m-k$ est supérieur à l'indice de nilpotence n, ce qui est toujours vrai lorsque $m \geqslant 2n-1$.
3) On prend un endomorphisme b qui induise un isomorphisme entre l'image de a et un supplémentaire de son noyau. Alors bab coïncide avec a à la fois sur son noyau et sur ce supplémentaire, ce que l'on voulait.
4) Supposons $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrons que $\operatorname{ad}_f^{2n-2} \neq 0$. Par la première question, on a pour tout g l'identité $\operatorname{ad}_f^{2n-2}(g) = \sum_{k=0}^{2n-2} \binom{2n-2}{k}(-1)^{2n-2-k} f^k g\, f^{2n-2-k}$, et le seul terme éventuellement non nul de la somme apparaît quand $k = n-1$; on a par conséquent $\operatorname{ad}_f^{2n-2}(g) = \binom{2n-2}{n-1}(-1)^{n-1} f^{n-1} g\, f^{n-1}$. Mais la question précédente permet de choisir g de façon à ce que $f^{n-1} g\, f^{n-1} = f^{n-1}$, et donc $\operatorname{ad}_f^{2n-2}(g) \neq 0$.

Corrigé 13. Par théorème d'intégration des équivalents, la série $\sum \ln^2 k$ étant (grossièrement) divergente, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \ln^2 k &\underset{n\to\infty}{\sim} \int_1^n \ln^2 t \,\mathrm{d}t \\ &\underset{\text{IPP}}{=} \left[t \ln^2 t\right]_1^n - 2\int_1^n \ln t \,\mathrm{d}t \\ &= n\ln^2 n - 2n\ln n + 2n\end{aligned}$$

$$\sim n \ln^2 n.$$

On peut aussi procéder par comparaison série-intégrale, ou encore par une somme de Riemann (?).

Corrigé 14. La fonction à intégrer est continue sur $]0,1[$, prolongeable par continuité en 1. Elle est de signe constant (négative) au voisinage de 0 et a pour équivalent $\ln t$, qui est intégrable en 0. Donc l'intégrale existe. Pour exprimer I comme somme d'une série, on développe $(1+t)^{-1}$; on fait le calcul formellement puis on justifiera les convergences requises. On a formellement

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n \ln t \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t.$$

On calcule donc

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^n \ln t \,\mathrm{d}t &= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln t\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} \,\mathrm{d}t \text{ par IPP} \\ &= -\left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_0^1 \\ &= \frac{-1}{(n+1)^2}.\end{aligned}$$

Comme cette suite est de signe constant et sommable, l'interversion précedente est justifiée. On obtient finalement

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t} \,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Corrigé 15. On calcule d'abord le polynôme caractéristique χ :

$$\begin{aligned}\chi &= \begin{vmatrix} X & 0 & -z \\ -1 & X & 0 \\ -1 & 0 & X \end{vmatrix} \\ &= X^3 - zX \\ &= X\,(X^2 - z).\end{aligned}$$

Si $z \neq 0$, il a trois racines distinctes ; le polynôme caractéristique est alors scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$, et la matrice considérée est donc diagonalisable. Dans le cas contraire, la matrice est nilpotente et non nulle, et ne peut donc être diagonalisable. Conclusion : la matrice est diagonalisable si et seulement si z est non nul.

Corrigé 16. La matrice M étant symétrique, elle est diagonalisable à valeurs propres réelles. Comme $M^p = I_n$, toute valeur propre λ vérifie $\lambda^p = 1$, d'où $\lambda = \pm 1$ et donc $\lambda^2 = 1$. Comme M est diagonalisable on en déduit $M^2 = I_n$. Si M est définie positive, ses valeurs propres sont positives, donc valent 1 et donc $M = I_n$.

Corrigé 17. Soit $x \in \mathbb{R}_+$; on va chercher quand la suite $a_n x^n$ est bornée. Il suffit de regarder les termes non nuls, ce qui revient à examiner $r^k x^{k^2}$ où $n = k^2$. Mais $r^k x^{k^2}$ tend vers 0 si $x < 1$ et vers l'infini si $x > 1$, donc le rayon de convergence est 1.

Corrigé 18. Bien que ces deux matrices aient le même polynôme caractéristique, le polynôme minimal de la première est $(X-1)^3$ et celui de la seconde est $(X-1)^2$, elles ne sont donc pas semblables. (En d'autres termes : la seconde est annulée par $(X-1)^2$ ce qui n'est pas le cas de la première.)

Corrigé 19. La fonction f est clairement définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Vérifions qu'on peut la prolonger en continuité en 0 : par développement limité du sinus au voisinage de zéro, $f \to_0 1$. Pour étudier l'intégrabilité, on découpe $\mathbb{R}_+$ en intervalles $I_k = [k\pi, (k+1)\pi]$. Pour tout $x \in I_k$, on a $|\sin x|^x \geqslant |\sin x|^{(k+1)\pi}$. On recentre l'intervalle au point où $|\sin x| = 1$: on pose $x = (k+\frac{1}{2})\pi+y$ ($y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). On a alors

$$|\sin x|^{(k+1)\pi} = |\cos y|^{(k+1)\pi} \geqslant (1-ay^2)^{(k+1)\pi} \text{ pour un } a > 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_{I_k} |\sin x|^x \, \mathrm{d}x &\geqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1-ay^2)^{(k+1)\pi} \, \mathrm{d}y \\
&\geqslant \int_{|y|\leqslant\frac{1}{k}} (1-ay^2)^{(k+1)\pi} \, \mathrm{d}y \\
&\geqslant \int_{|y|\leqslant\frac{1}{k}} \left(1-\tfrac{a}{k^2}\right)^{(k+1)\pi} \, \mathrm{d}y \\
&= \tfrac{2}{k} \exp\left((k+1)\pi \ln(1-\tfrac{a}{k^2})\right) \\
&= \tfrac{2}{k} \exp O(k^{-1}) \\
&= \tfrac{2}{k} + O(k^{-2}).
\end{aligned}$$

La série ayant pour terme général cette dernière expression n'est pas sommable, donc la série de terme général $\int_{I_k} f$ ne l'est pas non plus, ce qui prouve que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Corrigé 20. L'application f est clairement un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ (intégrer un polynôme entre des bornes polynomiales donne bien un polynôme). Calculons sa valeur sur X^n :

$$\begin{aligned}
f(X^n)(x) &= \int_x^{x+1} t^n \, \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_x^{x+1} \\
&= \tfrac{1}{n+1}\left(x^{n+1} - (x+1)^{n+1}\right) \\
&= \tfrac{1}{n+1}\left((n+1)x^n + o(x^n)\right) \\
&= x^n + o(x^n).
\end{aligned}$$

Cela montre que f préserve le degré et le coefficient dominant ; elle induit donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ de déterminant 1.