Intégration, intégrales généralisées, intégrales à paramètre

1 Énoncés

Exercice 1. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\,\mathrm{th}(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 2. Après avoir justifié toutes les convergences, montrer que

$$\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

Exercice 3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}x$ existe et calculer sa valeur.

Exercice 4. Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)\,x^2}}{t^2+1}\,\mathrm{d}t.$$

Exprimer g en fonction de f et en déduire la valeur de $\int_0^{\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5. On considère l'application $F : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Montrer l'existence de $\lim_{1^-} F$ et calculer cette limite. En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 6. On note E l'ensemble des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Si $f \in E$, on note $\Phi(f) = \left(\int_0^1 f\right) \cdot \left(\int_0^1 \frac{1}{f}\right) \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer $\inf_E \Phi$ et les éventuelles fonctions qui l'atteignent.

b) Déterminer $\sup_E \Phi$.

Exercice 7. Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. Calculer l'intégrale

$$\int_0^{\pi} \ln \frac{b - \cos x}{a - \cos x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$. Montrer que

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{zt} - 1}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(n+1)\,z^n$$

où l'on a posé $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$.

Exercice 9. Pour $x > 0$, on note $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que si $x > 0$, alors $\displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$.

b) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n!\,n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x)$.

Exercice 10. Soit $\sum c_n$ une série à termes complexes absolument convergente.

a) Montrer que $f : t \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $t \mapsto e^{-t} f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\int_0^{\infty} e^{-t} f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$. On note $m = \frac{1}{T}\int_0^T f$. Montrer que $\int_T^{\infty} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $m = 0$.

Exercice 12. Déterminer la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^{\infty} \sin(t^2)\,\mathrm{d}t\,; \qquad \int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}.$$

Dans le second cas, on donnera la valeur de l'intégrale.

2 Corrigés

Corrigé 1. L'existence vient du fait que $\lim_{+\infty} \mathrm{th} = 1$. On calcule en faisant le changement de variable $u = e^{-t}$, ce qui conduit à intégrer $\frac{u^2-1}{u^2(u^2+1)} = \frac{-1}{u^2} + \frac{2}{1+u^2}$ et donne finalement $\frac{\pi}{2} - 1$.

Corrigé 2. Pour la convergence de chaque membre, on utilise le fait que $x^{-x} = e^{-x\ln x} = O(x^{-2})$ en $+\infty$. On calcule :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 e^{-x\ln x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x\ln x)^n}{n!}\,\mathrm{d}x \\
&\underset{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 x^n \ln^n x\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^n \ln^n x\,\mathrm{d}x &\underset{\text{IPP}}{=} -\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1}\frac{n\ln^{n-1} x}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{n}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x \\
&\underset{\text{réc.}}{=} (-1)^a \frac{n(n-1)\cdots(n-a+1)}{(n+1)^a} \int_0^1 x^n \ln^{n-a} x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

ce qui justifie l'interversion et la valeur de l'intégrale.

Corrigé 3. $I = \int_0^{\pi/4} \ln \sin(2x) 2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2I$.

Corrigé 4. On a $g' = -2ff'$, d'où $g(x) - \frac{\pi}{4} = -f(x)^2$, et on déduit la valeur de l'intégrale du fait que $\lim_\infty g = 0$, puisque $g(x) \leqslant e^{-x^2} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}$.

Corrigé 5. L'idée est que quand x tend vers 1, on aura $\frac{1}{\ln t} \sim \frac{1}{t \ln t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln\ln t$. Plus formellement, quand $0 < x^2 \leqslant t \leqslant x < 1$, on a $\frac{x^2}{t}\frac{1}{\ln t} \geqslant \frac{1}{\ln t} \geqslant \frac{x}{t}\frac{1}{\ln t}$, d'où

$$x(\ln\ln x^2 - \ln\ln x) \leqslant F(x) \leqslant x^2(\ln\ln x^2 - \ln\ln x).$$

Et $\ln\ln x^2 - \ln\ln x = \ln 2$, donc $\lim_1 F = \ln 2$. De plus, $F'(x) = \frac{2x}{\ln x^2} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x-1}{\ln x}$, et par conséquent $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t = \lim_1 F - F(0) = \ln 2$.

Corrigé 6. Par Cauchy-Schwarz, on a toujours $\Phi(f) \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $\sqrt{f} \propto \frac{1}{\sqrt{f}}$, autrement dit si f est constante. Montrons que la borne supérieure est infinie. L'idée est d'avoir une fonction petite à un endroit et grande à un autre. On pourrait prendre une fonction affine par morceaux, valant 1 sur $[0, \frac{1}{3}]$ et a sur $[\frac{2}{3}, 1]$, ou la fonction $x \mapsto e^{-ax}$, en faisant tendre a vers zéro ou l'infini.

Corrigé 7. On écrit l'intégrale comme $F(b) - F(a)$, avec $F(t) = \int_0^\pi \ln(t - \cos x)\,\mathrm{d}x$. En dérivant sous le signe intégral, on obtient $F'(t) = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{t - \cos x}$ que l'on intègre par exemple par le changement de variable $u = \tan\frac{x}{2}$. Cela donne $F'(t) = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}}$, puis $F(t) = \pi \operatorname{argcosh} t$ à une constante près. On en déduit que l'intégrale vaut $\pi(\operatorname{argcosh} b - \operatorname{argcosh} a) = \pi \ln \frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}$.

Corrigé 8. On commence par développer $\frac{1}{e^t-1}$ en série : on a $\frac{1}{e^t-1} = \sum_{n\geqslant 1} e^{-nt}$. Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{e^{zt}-1}{e^t-1}\,\mathrm{d}t &= \int_0^\infty (e^{zt}-1) \sum_{n\geqslant 1} e^{-nt}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{?}{=} \sum_{n\geqslant 1} \int_0^\infty (e^{zt}-1) e^{-nt}\,\mathrm{d}t && (1) \\
&= \sum_{n\geqslant 1} \left(\tfrac{1}{n-z} - \tfrac{1}{n}\right) \\
&\underset{|z|<1}{=} \sum_{n\geqslant 1} \tfrac{1}{n} \sum_{m\geqslant 1} \left(\tfrac{z}{n}\right)^m \\
&\underset{?}{=} \sum_{m\geqslant 1} z^m \sum_{n\geqslant 1} \tfrac{1}{n^{m+1}} && (2)
\end{aligned}$$

comme voulu. Justifions brièvement les deux interversions : l'interversion (1) vient de la majoration $|e^{zt}-1| \leqslant e^{|z|t} - 1$ obtenue en appliquant l'inégalité triangulaire à un développement en série, et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{|z|}{n(n-|z|)}$ converge. L'interversion (2) est du même type.

Corrigé 9.

a) Pour fixer les bornes de l'intégrale on pose $\varphi_n(t) = (1 - \frac{t}{n})^n \mathbb{1}_{t\leqslant n}$, qui converge simplement vers $t \mapsto e^{-t}$ avec $|\varphi_n(t)| \leqslant e^{-t}$, d'où le résultat par convergence dominée.

b) On calcule par intégrations par parties successives :

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1 - \tfrac{t}{n}\right)^m t^{x-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{m}{nx} \cdots \frac{m-a+1}{n(x+a-1)} \int_0^n \left(1 - \tfrac{t}{n}\right)^{m-a} t^{x+a-1}\,\mathrm{d}t \\
&\underset{a=m}{=} \frac{m!}{n^m x \ldots (x+m-1)} \int_0^n t^{x+m-1}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \frac{m!}{n^m x \dots (x+m-1)} \frac{n^{x+m}}{x+m}$$

d'où pour $m = n$

$$\int_0^n \left(1 - \tfrac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \,\mathrm{d}t = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Corrigé 10.

a) Le rayon de convergence est infini car (c_n) est bornée.

b) La série de terme général $\int_0^\infty |c_n| \frac{t^n}{n!} e^{-t} \,\mathrm{d}t = |c_n| \frac{\Gamma(n+1)}{n!} = |c_n|$ est sommable, d'où l'intégrabilité et le résultat.

Corrigé 11. On pose $F(x) = \int_0^x f$, qui vérifie $F(x) = mx + O(1)$. Par intégration par parties on obtient

$$\int_T^A \frac{f(t)}{t} \,\mathrm{d}t = O(A^{-1}) + \int_T^A \frac{F(t)}{t^2} \,\mathrm{d}t = m \ln \tfrac{A}{T} + O(A^{-1}) + \int_T^A O(t^{-2}) \,\mathrm{d}t$$

qui converge si et seulement si $m = 0$.

Corrigé 12. Le premier est une intégration par parties. Pour le second on fait un changement de variables homographique qui ramène à calculer une primitive de

$$\frac{u^2 - 1}{(1+3u^2)^2} = -\frac{4}{3\,(1+3u^2)^2} + \frac{1}{3\,(1+3u^2)}$$

ce qui se fait par les méthodes usuelles (intégration par parties). On obtient $\frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.