Fonctions de la variable réelle

1 Énoncés

Exercice 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en 0 et en 1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$. Peut-on remplacer $\frac{1}{n}$ par $\ell \in [0,1]$ quelconque ?

Exercice 2. Quels sont les endomorphismes du corps $\mathbb{R}$?

Exercice 3 (Mines)**.** Soient f et g des fonctions continues de $[0,1]$ dans $[0,1]$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

1) Montrer que l'ensemble des points fixes de f possède un plus grand et un plus petit élément.
2) Montrer l'existence de $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 4 (d'après Mines MP)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application.

a) On suppose que $f \circ f = \mathrm{id}$ et que f est croissante. Montrer que $f = \mathrm{id}$.
b) On suppose que f est continue et que $f \circ f$ admet un point fixe. Est-ce le cas de f ? Généraliser.

Exercice 5 (Centrale)**.** Soit $f \in \mathcal{C}^2([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$.

1) Notons $u_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2})$. Montrer que $\lim u_n = \frac{f'(0)}{2}$.
2) Soient $g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $v_n = \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n^2}) g(\frac{k}{n})$. Quelle est la limite de (v_n) ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante (a_n) de réels tels que $f^{(n)}(a_n) = 0$ pour tout n.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$. Montrer que $\ln \circ f$ est convexe si et seulement si pour tout $\alpha > 0$, la fonction f^α est convexe.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique de période $T > 0$. On note $m = \frac{1}{T} \int_0^T f$. Montrer que $\int_T^\infty \frac{f(t)}{t} \,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $m = 0$.

Exercice 9. Déterminer la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^\infty \sin(t^2) \,\mathrm{d}t \,; \qquad \int_0^1 \frac{t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t)(1+3t)}}.$$

Dans le second cas, on donnera la valeur de l'intégrale.

Exercice 10. Calculer un équivalent en 0 de $f : x \mapsto \cosh(\sinh x) - \cosh(\sin x)$.

Exercice 11 (Centrale)**.** Pour $n \geqslant 3$, notons $P_n = X^n - nX + 1$.

1) Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $P_n(x_n) = 0$.
2) Prouver que la suite (x_n) est décroissante, puis qu'elle est convergente.
3) Trouver un développement asymptotique à deux termes de x_n.

Exercice 12. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x^5$. Montrer que :

1) Il existe $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ tels que pour tout $x \in E =]\alpha, \beta[\setminus \{0\}$, il existe $y \neq x$ tel que $f(y) = f(x)$. On note $g(x)$ ce y ;

2) La fonction g est continue, décroissante, puis qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur E et prolongeable par coninuité en 0 ;
3) On a $g(x) \sim_0 -x$;
4) Il existe $p > 1$ et $a \neq 0$ tels que $g(x) = -x + a\,x^p + o(x^p)$;
5) Il existe $q > p$ et $b \neq 0$ tels que $g(x) = -x + a\,x^p + b\,x^q + o(x^q)$.

Exercice 13. Donner un développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. En l'élevant au carré, donner une expression simple de la somme $\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k}$. Donner une interprétation combinatoire.

Exercice 14. Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ une fonction continue, convexe et strictement croissante. On définit par récurrence deux suites u et v en demandant que $a \leqslant u_0 < v_0 \leqslant b$ et

$$u_{n+1} = \tfrac{u_n+v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = f^{-1}\big(\tfrac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\big).$$

Montrer que u et v convergent vers une même limite.

2 Corrigés

Corrigé 1. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors $f(\,\cdot + \frac{1}{n}) - f$ est non nulle, donc de signe constant, ce qui en sommant sur les $\frac{k}{n}$ contredit la nullité en 1.

Cherchons une fonction f n'ayant pas de corde de longueur ℓ comme somme d'une fonction périodique de période ℓ et d'une fonction affine, de façon à ce que $f(\,\cdot + \ell) - f$ soit constante et non nulle : par exemple,

$$f(t) = \cos \tfrac{2\pi t}{\ell} - 1 + \alpha t.$$

Les conditions aux bornes et le fait de ne pas avoir de corde de longueur ℓ se traduisent exactement par $\cos \frac{2\pi}{\ell} \neq 1$, soit $\frac{1}{\ell} \notin \mathbb{Z}$. Cette construction fonctionne donc pour les $\ell \in [0,1]$ qui ne sont pas de la forme $\frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ entier. $\square$

Corrigé 2. Un tel morphisme est additif, dont vaut classiquement l'identité sur $\mathbb{Q}$. En utilisant la multiplicativité, on voit qu'il respecte les carrés, donc les réels positifs, donc est croissant, ce qui conclut.

Corrigé 3. Soit F l'ensemble des points fixes de f.
1) F est fermé dans $[0,1]$ puisque f est continue.
2) F est stable par g, en notant $m = \min F$ et $M = \max F$ on a donc $g(m) \geqslant m = f(m)$ et de même $g(M) \leqslant f(M)$. Par continuité $f - g$ s'annule sur $[m, M]$.

Corrigé 4.

a) Supposons que x soit tel que $f(x) \neq x$, disons $f(x) > x$. Alors $f(f(x)) \geqslant f(x) > x$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. On peut aussi voir le résultat géométriquement : pour tout x, les points $(x, f(x))$ et $(f(x), x)$ sont deux points du graphe de f symétriques par rapport à la première bissectrice, donc sont sur la bissectrice par croissance.
b) Supposons que f n'admette pas de point fixe. Cela implique que $f = \mathrm{id} + g$ avec g de signe constant strict. En composant à droite, on aboutit à une absurdité. On pourrait remplacer $f \circ f$ par $f^{\circ n}$ sans changer le raisonnement. On peut aussi (mais seulement dans le cas $n = 2$) adapter la deuxième idée de la première question : si x est un point fixe, on dispose de deux points du graphe de part et d'autre de la bissectrice, donc le théorème des valeurs intermédiaire conclut.

Corrigé 5.

1) On écrit que $f(x) = x\,f'(0) + O(x^2)$ au voisinage de 0, et

$$\begin{aligned}\sum f(\tfrac{k}{n^2}) &= \sum \tfrac{k}{n^2}\, f'(0) + O(n \cdot \tfrac{n^2}{n^4}) \\ &= \textstyle\int_0^1 x \,\mathrm{d}x + o(1).\end{aligned}$$

2) Idem, on aboutit à

$$\sum \tfrac{k}{n^2} f'(0) g(\tfrac{k}{n}) + O(\tfrac{1}{n})$$

qui tend vers $f'(0)\int_0^1 x\,g(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé 6. On le fait par récurrence sur n, l'initialisation étant immédiate. Supposons a_n construit, et que $D^{n+1}f$ ne s'annule pas sur $(a_n, +\infty)$. Alors $D^n f$ y est strictement monotone, donc ne s'annule plus. Écrivons l'identité de Taylor avec reste intégral sur un segment $[a, a+x]$ avec $a > a_n$:

$$f(a+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k f(a)}{k!} x^k = \int_a^{a+x} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(t)\,\mathrm{d}t$$

Le membre de gauche est négligeable devant x^n quand $n \to \infty$. Supposons (quittes à changer f en son opposée) que $D^n f$ est strictement croissante. On a alors

$$\int_a^{a+x} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^{a+x} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(a)\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^n - a^n}{n!} D^n f(a)$$

qui n'est pas négligeable devant x^n quand $n \to \infty$ puisque $D^n f(a) > 0$.

Corrigé 7. Sens direct : supposons $\ln \circ f$ convexe. Par définition, pour $t \in [0,1]$ et $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$\ln(f(tx + (1-t)y)) \leqslant t \ln(f(x)) + (1-t)\ln(f(x)).$$

En multipliant par $\alpha > 0$ et en passant à l'exponentielle qui est croissante et convexe, on obtient

$$f(tx + (1-t)y)^\alpha \leqslant \exp(t\ln(f(x)^\alpha) + (1-t)\ln(f(y)^\alpha)) \leqslant t f(x)^\alpha + (1-t) f(y)^\alpha$$

comme voulu.

Sens réciproque : on a l'inégalité

$$f(tx + (1-t)y)^\alpha \leqslant t f(x)^\alpha + (1-t) f(y)^\alpha. \tag{1}$$

Faisons un développement limité du membre de droite pour $\alpha \downarrow 0$:

$$\begin{aligned} t f(x)^\alpha + (1-t) f(y)^\alpha &= t(1 + \alpha \ln f(x)) + (1-t)(1 + \alpha \ln f(y)) + o(\alpha) \\ &= 1 + \alpha \cdot (t \ln f(x) + (1-t)\ln f(y)) + o(\alpha). \end{aligned}$$

On passe ensuite au logarithme (qui est croissant) dans l'équation (1), ce qui donne le résultat voulu en divisant par α et en faisant $\alpha \downarrow 0$.

Corrigé 8. On pose $F(x) = \int_0^x f$, qui vérifie $F(x) = mx + O(1)$. Par intégration par parties on obtient

$$\int_T^A \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = O(A^{-1}) + \int_T^A \frac{F(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = m \ln \tfrac{A}{T} + O(A^{-1}) + \int_T^A O(t^{-2})\,\mathrm{d}t$$

qui converge si et seulement si $m = 0$.

Corrigé 9. Le premier est une intégration par parties. Pour le second on fait un changement de variables homographique qui ramène à calculer une primitive de

$$\frac{u^2 - 1}{(1+3u^2)^2} = -\frac{4}{3\,(1+3\,u^2)^2} + \frac{1}{3\,(1+3\,u^2)}$$

ce qui se fait par les méthodes usuelles (intégration par parties). On obtient $\frac{1}{3} + \frac{2\pi}{9\sqrt{3}}$.

Corrigé 10. Comme $\sinh x \sim \sin x \sim x$, il faut aller au moins à l'ordre 3, donc à l'ordre 4 par parité de cosh.

$$\begin{aligned}
\cosh(\sinh x) &= \cosh(x + \tfrac{x^3}{6} + o(x^4)) \\
&= 1 + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{5\,x^4}{24} + o(x^4) \\
\cosh(\sinh x) &= \cosh(x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4)) \\
&= 1 + \tfrac{x^2}{2} - \tfrac{x^4}{8} + o(x^4) \\
f(x) &\sim \tfrac{x^4}{3}.
\end{aligned}$$

Corrigé 11.

1. Étude de P_n.
2. On montre que $P_{n+1} \leqslant P_n$ sur $]0,1[$, ce qui donne la décroissance de (x_n), puis sa convergence par minoration.
3. On utilise que pour tout $n \geqslant 3$, $x_n = \frac{1}{n}(1+x_n^n)$. Comme $x_n \in [0, x_0] \subset [0,1[$, on a $x_n^n \to 0$, ce qui donne successivement les développements $x_n = \frac{1}{n} + o(x_0^n)$ puis $x_n = \frac{1}{n}(1+n^{-n}+o(n^{-n}))$.

Corrigé 12.

1) On a $f'(x) \sim_0 2x$. Il existe donc un voisinage V de 0 sur lequel f est strictement décroissante puis strictement croissante. Quitte à réduire le voisinage, on peut de plus supposer que $f(V_{<0}) = f(V_{>0})$. Alors f admet une réciproque strictement décroissante sur $V_{<0}$ et une réciproque strictement croissante sur $V_{>0}$, alors $y = \varphi(f(x))$, où φ est l'inverse dans le demi-voisinage ne contenant pas x, convient.

2) La fonction f étant un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur chaque demi-voisinage, ses réciproques en sont également, et g aussi par composition. Les limites en 0 de f et ses réciproques étant nulles, par composition les limites à gauche et à droite de g sont nulles, et g se prolonge donc en 0.

3) Au voisinage de 0 on a $x^2 + x^5 = g(x)^2 + g(x)^5$ mais aussi $x^5 = o(x^2)$ et $g(x)^5 = o(g(x)^2)$ car g tend vers 0, donc $x^2(1+o(1)) = g(x)^2(1+o(1))$ d'où $g(x)^2 \sim x^2$. Mais $g(x)$ et x sont de signes opposés, donc $g(x) \sim -x$.

4) On a donc $g(x)^5 = -x^5 + o(x^5)$, d'où $g(x)^2 = x^2 + 2x^5 + o(x^5)$. On en déduit

$$\begin{aligned}
g(x) &= -\operatorname{sgn}(x)(x^2 + 2x^5 + o(x^5))^{\frac{1}{2}} \\
&= -x\,(1 + 2x^3 + o(x^3))^{\frac{1}{2}} \\
&= -x\,(1 + x^3 + o(x^3)) \\
&= -x - x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

5) On obtient maintenant

$$\begin{aligned}
g(x)^5 &= (-x - x^4 + o(x^4))^5 \\
&= -x^5(1 + x^3 + o(x^3))^5 \\
&= -x^5(1 + 5x^3 + o(x^3)) \\
&= -x^5 - 5x^8 + o(x^8)
\end{aligned}$$

d'où $g(x)^2 = x^2 + 2x^5 + 5x^8 + o(x^8)$. On arrive enfin à

$$\begin{aligned}
g(x) &= -x\,(1 + 2x^3 + 5x^8 + o(x^8))^{\frac{1}{2}} \\
&= -x\,(1 + x^3 - \tfrac{1}{2}x^6 + o(x^6)) \\
&= -x - x^4 + \tfrac{1}{2}x^7 + o(x^7).
\end{aligned}$$

Corrigé 13. On a

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{\sqrt{1-4x}} &= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{-1/2}{k}(-4x)^k \\ &= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{2k}{k} x^k \end{aligned}$$

d'où le fait que la somme en question vaut 4^n en élevant au carré.

Corrigé 14. On peut remarquer (mais ce n'est pas indispensable) qu'il suffit de montrer par récurrence que $u_n \leqslant v_n$: en effet, on aura alors $u_{n+1} \geqslant u_n$ et $v_{n+1} \leqslant v_n$ en appliquant f. Faisons-le : supposons l'inégalité vraie au rang n ; il faut montrer que

$$\tfrac{u_n+v_n}{2} \leqslant f^{-1}\left(\tfrac{f(u_n)+f(v_n)}{2}\right)$$

ce qui est immédiat vues les hypothèses sur f... Finalement, les deux suites sont convergentes, et les limites sont égales en passant à la limite dans la définition.

Remarque : pour $f = \log$, en adaptant le raisonnement, on retrouve la moyenne arithmético-géométrique.