Déterminant

Questions de cours

- Définition du déterminant d'un endomorphisme.
- Multiplicativité du déterminant des matrices.
- Énoncer différentes méthodes de calcul de déterminants (numériques ou formels).

1 Énoncés

Exercice 1. À quelle condition une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ a-t-elle son inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

Exercice 2. Soient A, B, C et D quatre matrices carrées de même taille. On suppose que A est inversible et commute avec C. Montrer que $\det \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = \det(AD - BC)$. De quelles hypothèses peut-on se passer ?

Exercice 3. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n. Montrer que, pour tout n-uplet $(u_1, \ldots, u_n) \in E^n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \det(u_1, \ldots, f(u_i), \ldots, u_n) = \operatorname{Tr}(f) \det(u_1, \ldots, u_n)$$

où le déterminant et la trace sont pris vis-à-vis d'une même base fixée.

Exercice 4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note L_A (resp. R_A) l'endomorphisme $M \mapsto AM$ (resp. $M \mapsto MA$) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer le déterminant de L_A et R_A en fonction de celui de A.

Exercice 5 (Mines 2009)**.** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que B soit nilpotente et commute avec A. Montrer que $\det(A + B) = \det A$.

Exercice 6. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commutant entre elles. Montrer que $\det(A^2 + B^2) \geqslant 0$. Question subsidiaire : chercher un contre-exemple si A et B ne commutent pas.

Exercice 7. Soient $E_1, \ldots, E_p$ des sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ telles que, pour $i \neq j$, les intersections $E_i \cap E_j$ soient de même cardinal non nul. Montrer que $p \leqslant n$. Indication : considérer la matrice A de taille $p \times n$ avec $a_{ij} = \mathbb{1}_{j \in E_i}$, et le déterminant de $A\,{}^tA$.

Exercice 8 (déterminant circulant)**.** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels et

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1 \end{pmatrix}.$$

En posant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$,

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \cdots & \omega^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

et en calculant $\det(A\Omega)$, en déduire la valeur de $\det A$.

Exercice 9. Soit A une matrice carrée de taille n, dont les coefficients valent ± 1. Montrer que son déterminant est divisible par 2^{n-1}.

2 Corrigés

Corrigé 1. Utiliser la formule de la comatrice.

Corrigé 2. On multiplie à gauche par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ -CA^{-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ pour obtenir une matrice triangulaire supérieure par blocs, puis on réintègre A à l'expression. On peut se passer de l'hypothèse d'inversibilité par densité des matrices inversibles.

Corrigé 3. Le membre de gauche est multilinéaire alterné en les u_i, il est donc proportionnel au déterminant. Pour calculer le coefficient de proportionnalité, on calcule en coordonnées.

Corrigé 4. On se place dans la base des E_{ij}, dans l'ordre $(E_{11}, \dots, E_{n1}, E_{12}, \dots, E_{nn})$. Puisqu'après calcul $AE_{ij} = \sum_k a_{ki} E_{kj}$, la matrice de L_A dans cette base est une matrice diagonale par blocs, dont les blocs diagonaux sont précisément A. Par conséquent $\det L_A = (\det A)^n$.

Pour ce qui est de R_A, on ordonne la base de l'autre manière, et les blocs diagonaux valent alors ${}^tA$.

Corrigé 5. On distingue deux cas, selon que A est inversible ou non. Si elle l'est, on se ramène à $A = 1$ en multipliant par A^{-1}, puis on se place dans une base où B est triangulaire supérieure stricte. Si A n'est pas inversible, l'hypothèse de commutation implique que (l'endomorphisme associé à) B stabilise son noyau ; mais la restriction dudit endomorphisme est encore nilpotente, et l'intersection des deux noyaux est donc non nulle. Par conséquent, $A + B$ n'est pas inversible non plus.

Remarque : en se plaçant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on peut cotrigonaliser A et B, ce qui donne le résultat.

Corrigé 6. Il suffit d'écrire $A^2+B^2 = (A+iB)(A-iB)$, et donc $\det(A^2+B^2) = |\det(A+iB)|^2 \geqslant 0$.

Corrigé 7. En notant $B = A\,{}^tA$, on a

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k \in E_i \cap E_j} = |E_i \cap E_j|$$

et donc, en notant $e_i = |E_i|$ et $c = |E_i \cap E_j|$ pour $i \neq j$, la matrice B est de la forme

$$\begin{pmatrix} e_1 & & c \\ & \ddots & \\ c & & e_p \end{pmatrix}.$$

Calculons son déterminant. On calcule plus généralement le déterminant

$$\begin{vmatrix} e_1 & & c \\ & \ddots & \\ d & & e_p \end{vmatrix}$$

pour $c \neq d$, puis on fera tendre d vers c. En ajoutant une indéterminée x à tous les coefficients, on voit (en imaginant l'effet d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes) que ce déterminant est de la forme $\alpha x + \beta$. Or, on connaît ses valeurs en $-c$ et $-d$: en notant $P = \prod (e_i - X)$, on aura

$$\begin{cases} & -\alpha c + \beta &= P(c) \\ \text{et} & -\alpha d + \beta &= P(d) \end{cases}$$

et le déterminant vaut donc $\beta = \frac{d\,P(c)-c\,P(d)}{d-c} = -cd\frac{\frac{P(c)}{c}-\frac{P(d)}{d}}{c-d}$, à supposer c et d non nuls. En faisant tendre d vers c, on obtient (par dérivation et continuité du déterminant)

$$\det B = P(c) - c\,P'(c) = \prod_{i=1}^{p}(e_i - c) + c\sum_{i=1}^{p}\prod_{j\neq i}(e_j - c).$$

Revenons aux E_i. Chaque e_i étant supérieur à c, on voit que si $\det B = 0$, alors il existe i et $j \neq i$ tels que $e_i = e_j = c$. Mais cela implique $|E_i \cap E_j| = |E_i| = |E_j|$ et donc $E_i = E_j$, ce qui est exclu. Donc B est inversible, donc de rang p, donc A est de rang supérieur à p, et inférieur à n, d'où la conclusion.

Corrigé 8. On a $A_{ij} = a_{j-i+1 \bmod n}$ et $\Omega_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}$, donc

$$\begin{aligned}
(A\Omega)_{ij} &= \sum_k a_{k-i+1 \bmod n}\,\omega^{(k-1)(j-1)} \\
&= \sum_k a_k\,\omega^{(k+i-2)(j-1)} \\
&= \omega^{(i-1)(j-1)}\sum_k a_k\,(\omega^{j-1})^{k-1} \\
&= \omega^{(i-1)(j-1)}\,P(\omega^{j-1})
\end{aligned}$$

avec une notation évidente. On en déduit finalement (par multilinéarité) que

$$\det(A\Omega) = \prod_k P(\omega^k)\cdot\det\Omega.$$

Comme les ω^{i-1} sont distincts, le déterminant (de Vandermonde) $\det\Omega$ est non nul, d'où

$$\det A = P(1)\cdots P(\omega^{n-1}).$$

Remarque : refaire l'exercice en diagonalisant la matrice.

Corrigé 9. Par des opérations élémentaires, ledit déterminant est le déterminant d'un bloc inférieur droit de taille $n-1$ constitué de 0 et de ± 2, d'où le résultat.