Algèbre générale

Questions de cours

Algèbre linéaire :
- Théorème du rang.
- Caractérisations des projecteurs et des symétries.
- Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.
- Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.
- Formule de Leibniz.
- $F \cup G$ sous-espace de E si et seulement si $F \cup G \in \{F, G\}$.

Matrices :
- La trace est constante sur les classes de similitude.
- Toute matrice est équivalente à une matrice de la forme J_r.
- L'ensemble $\mathcal{M}_n(k)$ est une algèbre, en général non commutative.

1 Énoncés

1.1 Algèbre linéaire et polynômes

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et soient u, v et w trois endomorphismes de E, avec w inversible.

a) Si u et w commutent, montrer que u et w^{-1} commutent.

b) Si $u \circ v + u + v = 0$, montrer que u et v commutent.

c) Donner un contre-exemple lorsque E n'est plus de dimension finie.

Exercice 2. Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $\binom{X}{d}$ le polynôme $\frac{X(X-1)\cdots(X-d+1)}{d!}$. On note aussi Δ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui envoie P sur $P(X+1) - P(X)$.

a) Calculer $\operatorname{Ker} \Delta$ et $\Delta\binom{X}{d}$ pour tout entier d.

b) Soit $P \in \mathbb{R}_d[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un $(d+1)$-uplet $(c_d, \ldots, c_0)$ d'entiers tel que $P = c_d\binom{X}{d} + \cdots + c_0\binom{X}{0}$.

c) Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Exercice 3. Montrer que les groupes suivants ne sont pas isomorphes :

a) $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Z}^3, +)$.

b) $(\mathbb{U}, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$.

c) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{R}, +)$.

d) $(\mathbb{Q}, +)$ et $(\mathbb{Z}, +)$.

Exercice 4. Soit G un groupe abélien d'ordre fini n. Montrer que pour tout élément $g \in G$, on a $g^n = 1$. Indication : considérer le produit des éléments de G.

Exercice 5. Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E, on pose $A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Montrer que la loi de composition Δ munit $\mathcal{P}(E)$ d'une structure de groupe, puis que les lois Δ et $\cap$ munissent $\mathcal{P}(E)$ d'une structure d'anneau.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel et F, G des sous-espaces de E. On considère l'application $\varphi : u \in \mathcal{L}(E) \mapsto (u|_F, u|_G) \in \mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(G,E)$.

a) Montrer que φ est linéaire.

b) À quelle condition φ est-elle injective ?

c) À quelle condition φ est-elle surjective ?

d) On suppose maintenant que E est de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(G,E)$? Calculer la dimension de $\operatorname{Ker}\varphi$, en déduire le rang de φ. Retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 7. Soit $P = X^3 + 2X^2 + X + 1$.

a) Combien P a-t-il de racines réelles ? On note x_1, x_2, x_3 ses racines.

b) Calculer $x_1 + x_2 + x_3$, $x_1x_2x_3$, $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$ et $\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3}$.

Exercice 8. Soient E et F deux espaces vectoriels. On dit qu'un couple $(u,v) \in \mathcal{L}(E,F) \times \mathcal{L}(F,E)$ vérifie $(*)$ si $uvu = u$ et $vuv = v$.

a) Si (u,v) vérifie $(*)$, montrer que $E = \operatorname{Ker}(u) \oplus \operatorname{Im}(v)$ et $F = \operatorname{Ker}(v) \oplus \operatorname{Im}(u)$.

b) Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et soient E_1 (resp. F_1) un supplémentaire de $\operatorname{Ker}(u)$ (resp. $\operatorname{Im}(u)$) dans E (resp. F). Montrer qu'il existe un unique $v \in \mathcal{L}(F,E)$ tel que (u,v) vérifie $(*)$, que $\operatorname{Ker}(v) = F_1$ et que $\operatorname{Im}(v) = E_1$.

Exercice 9. Soient E un espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E. Montrer que l'on a équivalence entre

i) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$;

ii) $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$;

iii) $E = \operatorname{Ker} u \oplus \operatorname{Im} u$.

Que se passe-t-il quand E n'est plus de dimension finie ?

1.2 Matrices

Exercice 10. a) Montrer qu'une matrice de trace nulle, à coefficients réels, est semblable à une matrice de diagonale nulle.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. S'il existe B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A soit égale à $[B,C] = BC - CB$, montrer que $\operatorname{Tr}(A) = 0$. Montrer que la réciproque est vraie.

Exercice 11. a) Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une unique matrice A telle que pour toute matrice M on ait $\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$. Indication : on pourra considérer l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans son dual qui à A associe la forme linéaire $\operatorname{Tr}(A\,\cdot)$.

b) Montrer que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ contient une matrice inversible.

Exercice 12. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour toutes matrices A et B, on ait $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer que φ est proportionnelle à la forme trace.

Exercice 13. On note $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $A \in V$. Déterminer la trace de l'endomorphisme de V qui envoie X sur XA.

Question subsidiaire : on note W le sous-espace de V constitué des matrices antisymétriques. Soit $A \in W$. Déterminer la trace de l'endomorphisme de W qui envoie X sur $AX - XA$.

Exercice 14 (Mines 2009)**.** Soit E l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a & c \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

pour $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$. Montrer que E est un espace vectoriel stable par multiplication. Déterminer une base ainsi que la dimension de E.

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente et telle que ${}^tAA = A{}^tA$. Que dire de ${}^tAA$? Déterminer A.

Exercice 16 (Centrale 2009)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non nulle et telle que $A^2 = 0$.

a) Montrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et équivalente à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Donner des matrices de passage lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 17 (Mines-Ponts 2009)**.** Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Trouver les $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M + \mathrm{Tr}(M)A = B$.

Exercice 18 (Mines 2009)**.** Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver BA.

2 Corrigés

2.1 Algèbre linéaire et polynômes

Corrigé 1.

a) Il suffit de multiplier la relation de commutation à gauche et à droite par w^{-1}.

b) Par hypothèse, $(u+1)(v+1) = 1$, donc $v+1$ est l'inverse de $u+1$, et commute donc avec ce dernier ; on en tire le résultat. (On utilise la finitude de la dimension pour dire qu'un élément inversible d'un côté l'est de l'autre, ce qui n'est plus vrai en dimension quelconque (prendre la multiplication par X ou la dérivation sur $k[X]$).)

c) La remarque précédente donne des contre-exemples.

Corrigé 2.

a) On trouve sans peine que $\mathrm{Ker}\,\Delta = \mathbb{R}\binom{X}{0} = \mathbb{R}$ et que $\Delta\binom{X}{d} = \binom{X}{d-1}$ pour $d \geqslant 1$.

b) On procède par récurrence sur d ; c'est clair si $d = 0$. Sinon, $\Delta(P)$ vérifie la même hypothèse, donc s'écrit $c_d\binom{X}{d-1} + \cdots c_1\binom{X}{0} = \Delta(c_d\binom{X}{d} + \cdots c_1\binom{X}{1})$. Par la première question, la différence est constante et vaut $P(0) \in \mathbb{Z}$. On conclut par récurrence.

c) Il est alors clair que cet ensemble est $\sum_{d\in\mathbb{N}} \mathbb{Z}\binom{X}{d}$.

Corrigé 3.

a) L'un est monogène, l'autre pas.

b) L'un possède de la torsion, l'autre pas.

c) Utiliser le fait que $\mathbb{Q} = \bigcup_{n,m} \{x \mid nx = m1\}$, ou un argument de dénombrabilité.

d) L'un est divisible, l'autre pas.

Corrigé 4. Fixons $g \in G$. L'application $h \mapsto gh$ permute les éléments de G, d'où $\prod_{h\in G} h = \prod_{h\in G} gh = g^n \prod_{h\in G} h$, ce qui conclut en simplifiant par $\prod_{h\in G} h$.

Corrigé 5. Pour la structure de groupe : le neutre est la partie vide et le symétrique, le complémentaire. Pour la structure d'anneau : la distributivité se vérifie par un calcul.

Corrigé 6.

a) Le fait de prendre une restriction et un couple sont des opérations linéaires.

b) Si $E = F+G$, l'application φ est injective. Montrons que la réciproque est vraie. Supposons $F + G \subsetneq E$, et soit H tel que $(F+G) \oplus H = E$. On définit u comme étant l'identité sur H et l'application nulle sur $F+G$, et cette application convient.

c) Si $F \cap G = 0$, alors φ est surjective en prenant un supplémentaire de $F \oplus G$ dans E. Réciproquement, si $x \in F \cap G$ est non nul et si $u_1(x) \neq u_2(x)$, alors (u_1, u_2) n'est pas atteinte par φ.

d) On obtient $\dim(\mathcal{L}(F,E) \times \mathcal{L}(G,E)) = \dim(E)(\dim(F)+\dim(G))$. En prenant H comme en (b), on a $\operatorname{Ker}\varphi \simeq \mathcal{L}(H,E)$, donc $\dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim(E)(\dim(E) - \dim(F+G))$. Le rang de φ est donc $\dim(E)(\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G))$. On retrouve donc les résultats des deux questions précédentes.

Corrigé 7.

a) Par étude des variations, P a une unique racine réelle.

b) On a $x_1+x_2+x_3 = -2$ et $x_1x_2x_3 = -1$. De plus $\frac{P'}{P} = \frac{1}{X-x_1} + \frac{1}{X-x_2} + \frac{1}{X-x_3}$ d'où $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{P'(0)}{P(0)} = 1$ et $\frac{1}{2-x_1} + \frac{1}{2-x_2} + \frac{1}{2-x_3} = \frac{P'(2)}{P(2)} = \frac{21}{19}$.

Corrigé 8.

a) La première relation donne $u(vu-1) = 0$, d'où $\operatorname{Im}(vu-1) \subset \operatorname{Ker}(u)$. Donc tout $x \in E$ s'écrit $x = (x - vu(x)) + (vu(x)) \in \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{Im}(v)$. De plus, si $vx \in \operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(v)$, on a $vuvx = 0 = vx$, donc $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Im}(v) = 0$ et la somme est directe.

b) Commençons par l'existence. On définit v comme étant nulle sur E_1 et la réciproque de $u|_{E_1}$ sur $\operatorname{Im} u$. On a alors les bons noyau et image, et les relations $uv = \pi_{\operatorname{Im}(u)}$ et $vu = \pi_{E_1}$, d'où découlent $(*)$. Pour l'unicité, uv et vu sont des projecteurs par composition des relations, et chaque relation donne la moitié des inclusions pour avoir les bons noyau et image. Cela signifie alors que v est la réciproque de u sur E_1.

Corrigé 9. Pour (i)$\Leftrightarrow$(ii), on utilise le théorème du rang.

Montrons que (i) et (ii) impliquent (iii). Si $x \in E$, on a $u(x) = u^2(y)$ pour un certain y, donc $x - u(y) \in \operatorname{Ker} u$ et $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u$. Si $x \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u$, on aura $x = u(y)$ avec $0 = u(x) = u^2(y)$, donc $y \in \operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, et $x = 0$.

Montrons que (iii) implique (i) et (ii). Soit $x \in E$; on l'écrit $x = x' + u(y)$ avec $x' \in \operatorname{Ker} u$. Alors $u(x) = u^2(y)$, et $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2$. Si $u^2(x) = 0$, alors $u(x) \in \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = 0$, d'où l'équivalence.

L'équivalence ((i)$\wedge$(ii))$\Leftrightarrow$(iii) ne dépend pas de la dimension. Pour des contre-exemples à l'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) en dimension infinie, on peut prendre une multiplication par X ou une dérivation dans $k[X]$.

En fait, on a montré que

a) $(\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2) \Leftrightarrow (\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = 0)$;

b) $(\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2) \Leftrightarrow (E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Im} u)$;

c) $(\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2) \Leftrightarrow (\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} u^2)$ en dimension finie.

2.2 Matrices

Corrigé 10. a) On procède par récurrence sur la taille de la matrice. Pour une matrice de taille 1, il n'y a rien à dire. Soit A de trace nulle et de taille n. Supposons que pour tout vecteur x, la famille (x, Ax) soit liée ; alors A est une homothétie, donc est nulle. Sinon, il existe un vecteur x tel que la famille (x, Ax) soit libre. On la complète en une base ; dans cette base, la matrice A s'écrit

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline 1 & & & \\ 0 & & A' & \\ \vdots & & & \end{array}\right)$$

où A' est une matrice de taille $n-1$, elle aussi de trace nulle. Par hypothèse de récurrence, il existe une matrice inversible P telle que $PA'P^{-1}$ soit de diagonale nulle. En posant $Q = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{smallmatrix}\right)$, on a

$$QAQ^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & * & \cdots & * \\ \hline * & & & \\ \vdots & & PA'P^{-1} & \\ * & & & \end{array}\right)$$

qui est de diagonale nulle comme voulu.

b) Le sens direct est évident. Soit maintenant A de trace nulle. Quitte à la conjuguer, ce qui est compatible avec le crochet de Lie, on peut se ramener par la question précédente au cas où A est de diagonale nulle.

On cherche A sous la forme $[B, D]$ où $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ est une matrice diagonale. On a $[B, D]_{ij} = b_{ij}(d_j - d_i)$ et il suffit donc de prendre des d_i distincts et $b_{ij} = \frac{a_{ij}}{d_j - d_i}$ pour $i \neq j$.

Corrigé 11. a) Cette application est une injection (utilise par exemple le fait que $\operatorname{Tr}(AE_{ij}) = a_{ji}$), donc un isomorphisme par égalité des dimensions, ce qui conclut quant à l'existence et l'unicité de A.

b) Soit φ une forme linéaire non nulle dont l'hyperplan en question est le noyau. Par la question précédente, il existe une unique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\varphi = \operatorname{Tr}(A\,\cdot)$. Écrivons $A = PJ_rQ$ avec $r \in [\![1, n]\!]$ et P et Q inversibles ; on cherche une matrice inversible B telle que $\operatorname{Tr}(AB)$ soit nulle, soit, ce qui revient au même, une matrice inversible C telle que $0 = \operatorname{Tr}(AQ^{-1}CP^{-1}) = \operatorname{Tr}(PJ_rCP^{-1}) = \operatorname{Tr}(J_rC)$. Il suffit alors de prendre C de la forme

$$\left(\begin{array}{c|c} D & \\ \hline & I_{n-r} \end{array}\right) \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}.$$

Corrigé 12. On spécialise l'identité en les matrices élémentaires, ce qui donne $\varphi(E_{ij}E_{k\ell}) = \varphi(E_{k\ell}E_{ij})$ puis $\delta_{jk}\,\varphi(E_{i\ell}) = \delta_{i\ell}\,\varphi(E_{kj})$. Cela implique que $\varphi(E_{kj}) = 0$ pour $k \neq j$, et que tous les $\varphi(E_{ii})$ sont égaux, ce qui conclut. (Réciproquement, une forme linéaire proportionnelle à la trace vérifie évidemment cette identité.)

Corrigé 13. Notons Φ cet endomorphisme. On a

$$\Phi(E_{ij}) = E_{ij}A = \sum_{k,\ell} a_{k,\ell}E_{ij}E_{k\ell} = \sum_{\ell} a_{j\ell}E_{i\ell},$$

d'où $\operatorname{Tr}(\Phi) = \sum_{i,j} a_{ji}$.

Pour la deuxième question, on pourrait se placer dans une base adaptée à l'espace des matrices antisymétriques, mais c'est calculatoire. Supposons par densité et continuité que A soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Prenons une base (e_i) de $\mathbb{C}^n$ avec $Ae_i = \lambda_i e_i$; alors les $e_i^t e_j - e_j^t e_i$ pour $i < j$ forment une base de W, et $e_i^t e_j - e_j^t e_i$ est propre de valeur propre $\lambda_i + \lambda_j$. La trace est donc $\sum_{i<j}(\lambda_i + \lambda_j) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(\lambda_i + \lambda_j) = (n-1)\operatorname{Tr} A$.

Corrigé 14. On a clairement $E = \mathbb{C}[\Omega]$ avec $\Omega = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}$.

Corrigé 15. Cette matrice est nilpotente comme produit commutant de matrices nilpotentes. Sa trace est donc nulle, ce qui équivaut (puisque le corps de base est $\mathbb{R}$) à $A = 0$.

Corrigé 16.

a) Commençons par montrer que A est de rang 1. Supposons par l'absurde qu'elle soit de rang 2, et soit x un vecteur non nul de son noyau ; on écrit $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}x \oplus S$ pour un supplémentaire S quelconque. Dans une base adaptée, A se réécrit alors

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui contredit l'hypothèse de rang 2. On prend ensuite un vecteur x hors du noyau de A, et on complète (Ax) en une base (y, Ax) de ce noyau ; la base (y, Ax, x) donne alors la première écriture. La seconde vient de ce que le rang vaut 1.

b) On applique ce qui a été fait précédemment.

Corrigé 17. En passant à la trace, on doit avoir $\mathrm{Tr}(M)(1 + \mathrm{Tr}(A)) = \mathrm{Tr}(B)$; si $\mathrm{Tr}(A) = -1$, l'équation n'a pas de solution sauf si $\mathrm{Tr}(B) = 0$, et dans ce cas on prend toute matrice de la forme $B + \lambda A$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\mathrm{Tr}(A) \neq -1$, on doit avoir $\mathrm{Tr}(M) = \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1+\mathrm{Tr}(A)}$, et $M = B - \frac{\mathrm{Tr}(B)}{1+\mathrm{Tr}(A)} A$; réciproquement, cette matrice convient.

Corrigé 18. On écrit A et B par blocs : $A = \binom{\ell}{X}$ et $B = (c\ Y)$. Par hypothèse $XY = I_2$, donc X et Y sont inversibles et $YX = I_2$; de plus $\ell Y = Xc = 0$ d'où $\ell = 0$ et $c = 0$. Finalement $BA = YX = I_2$.