TP 8 : Algèbre linéaire

Exercice 1. Opérations de base

1. Chargez le package `LinearAlgebra` (commande : `with(LinearAlgebra)`).
2. Définissez les matrices suivantes (voir `Matrix`) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 3 \\ 12 \end{pmatrix} ; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Calculez $A + B$, $3A$, AC, EB, A^3, ${}^tA$ (voir `Transpose`).
4. Définissez $R1, R2$ des matrices aléatoires de tailles respectives 5×7 et 7×5 (voir `RandomMatrix`), et $R = R2 \cdot R1$ (de taille 7×7).
5. Définissez la matrice $H = (h_{ij})$ de taille 10×10 avec $h_{ij} = \frac{1}{i+j}$.
6. Définissez la matrice J de taille 5×5 donnée par les lignes impaires et le colonnes paires de H (voir `SubMatrix`).
7. Construire la matrice par blocs $K = [A, B]$.
8. Calculez la trace et le déterminant de A, B, R, H, J (voir `Trace` et `Determinant`). Calculez l'inverse de celles qui sont inversibles.
9. Résolvez le système $Ax = C$ (voir `LinearSolve`).
10. Calculez le rang, une base du noyau, une base de l'image de $A, R1, R2, R, K$ (voir `Rank`, `NullSpace`, `ColumnSpace`). Comparez les résultats obtenus pour $R1, R2, R$ lorsque cela a un sens.

Exercice 2. Matrices particulières

1. Écrivez une procédure `EstProjecteur` qui prend en entrée une matrice carrée `M` et renvoie `true` ou `false` suivant si `M` est la matrice d'un projecteur.
2. On dit qu'une matrice carrée M est *nilpotente* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $M^k = 0$. Le plus petit tel k est *l'indice de nilpotence* de M.
   a) Soit $M \neq 0$ nilpotente de taille n, et k tel que $M^{k-1} \neq 0$ et $M^k = 0$. Soit x un vecteur tel que $M^{k-1}x \neq 0$. Montrer que la famille $(x, Mx, \cdots, M^{k-1}x)$ est libre. En déduire que $k \leq n$.
   b) Écrivez une procédure `EstNilpotente` qui prend en entrée une matrice carrée `M` et teste si `M` est nilpotente : elle doit renvoyer `false` ou l'indice de nilpotence.
   c) Montrer qu'une matrice M de taille n est nilpotente si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $2^q < 2n$ et $M^{2^q} = 0$.
   d) Écrivez une procédure `EstNilpotente2` qui renvoie un tel 2^q lorsqu'il existe (et `false` sinon) et qui utilise au plus q multiplications de matrices (attention, une puissance utilise plusieurs multiplications !).
3. On dit qu'une matrice carrée M est *circulante* si chaque ligne de M est la permutation circulaire vers la droite de la ligne supérieure.
   Indication : on pourra introduire la permutation σ qui à $i < n$ associe $i + 1$ et à n associe 1. On pourra aussi remarquer que $\sigma(i) = 1 + (i \mod n)$.

a) Écrivez une procédure `EstCirculante` qui prend en entrée une matrice carrée `M` et qui teste si `M` est circulante.

b) Montrer que le produit de deux matrices circulantes est encore une matrice circulante.

c) Combien faut-il de multiplications de coefficients pour calculer le produit de deux matrices carrées quelconques de taille n (par la formule définissant le produit) ?

d) Écrivez une procédure `ProduitCirculant` qui prend en entrée deux matrices circulantes `M1,M2` et qui renvoie le produit `M1.M2`, en utilisant au plus $O(n^2)$ multiplications de coefficients.

Exercice 3. Algorithme du pivot

1. Chargez le package `Student[LinearAlgebra]`.
2. Écrivez une procédure `CherchePivot` qui prend en entrée une matrice M de taille $k \times n$ et deux entiers i, j et qui renvoie le premier indice $i_0 \geq i$ tel que $M_{i_0,j} \neq 0$ s'il existe, et $k+1$ sinon.
3. Écrivez une procédure `Pivote` qui prend en entrée une matrice M de taille $k \times n$ et deux entiers i, j tels que $M_{i,j} \neq 0$ et qui renvoie une matrice N équivalente à M, ayant les mêmes $j-1$ premières colonnes, et dont la colonne $N_{.,j}$ est nulle à partir du rang $i+1$ (voir `AddRow`).
4. Écrivez une procédure `Echelon` qui prend en entrée une matrice M de taille $k \times n$ et qui renvoie la matrice N échelonnée, équivalente à N, obtenue à partir de l'algorithme du pivot (voir `SwapRow`).
5. Modifiez les procédures précédentes de sorte à obtenir aussi le rang de M.
6. Modifiez les procédures précédentes de sorte à obtenir aussi le déterminant de M.
7. Évaluez le nombre d'opérations élémentaires utilisées par la procédure `Echelon` (en fonction de n et k).

Exercice 4. Étude d'un opérateur linéaire

Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on définit :

$$A_M : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto XM - MX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Écrivez une procédure `MatriceA` qui prend en entrée une matrice carrée `M` de taille n, et qui renvoie la matrice carrée de taille n^2 de A_M dans la base des $E_{i,j}$. On indexera la base par $E_{i,j} = F_{i+n(j-1)}$ (on a $1 \leq i + n(j-1) \leq n^2$ pour $1 \leq i, j \leq n$).
2. Que représente $\ker A_M$ par rapport à la matrice M ? Calculez ce noyau et sa dimension pour les matrices précédentes A, B, R, H, J.
3. Définissez quelques matrices nilpotentes M et testez alors si A_M est nilpotente. Que remarquez-vous ? Démontrez que c'est toujours le cas, en démontrant d'abord l'identité

$$(A_M)^k(X) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} M^i X M^{k-i}.$$