TP 5 : Polynômes et développements limités

Exercice 1. Polynômes

1. Nous allons voir quelques manipulations supplémentaires sur les polynômes. Définissez les polynômes $P = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$, $Q = x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 6x + 1$, $R = x^{11} - 2x^7 + 3x^5 - 4x^3 + 1$, $S = x^{15} - 1$, $T = x^{13} + x^{11} - x^{10} - 2x^9 - 2x^7 + 4x^6 + 2x^8 - x^5 + 2x^3 - 3x^2 - 2x^4 + 3x - 1$. Calculez leur valeur en -2, leurs racines (`solve`), leur dérivée (`diff`).
2. Demandez à Maple de les factoriser (`factor`). Que remarquez-vous ? Réessayez de factoriser Q avec un second argument `sqrt(5)`. Commentez.
3. Calculez le quotient (`quo`) et le reste (`rem`) dans la division euclidienne de R par Q, de T par P, de S par P.
4. On peut calculer le PGCD de deux polynômes avec la commande `gcd`. Utilisez cela pour tester si les polynômes précédents ont des racines multiples.
5. On peut extraire les coefficients d'un polynôme. Testez la commande `coeffs` sur P, Q, R, S, T. Donne-t-elle tous les coefficients du polynôme ? Pour avoir un coefficient à la fois, on utilise par exemple `coeff(P,x,5)`. Comment peut-on utiliser cela pour récupérer rapidement tous les coefficients d'un polynôme (faites-le) ?
6. On peut créer rapidement un polynôme sous forme de somme avec la commande `add` : par exemple, essayez `add(a[i]*x^i,i=0..10)`. Créez le polynôme $U = \sum_{k=0}^{20} (-1)^k k^2 x^{k^3}$. On peut faire de même avec des produits par la commande `mul` : créez le polynôme $V = \prod_{k=0}^{15} (x - k^2)$.

Exercice 2. Développements limités

1. La commande de base pour calculer un développement limité est `taylor`. Testez en $x = 0$ et en $x = 1$ sur $\exp(x)$, $\cosh(x)$, $\cos(\sin(x))$.
2. Essayez à nouveau en 0 et en 1 sur $\frac{x+2}{x^2-1}$ et $\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$. Que se passe-t-il ?
3. Lorsqu'une expression n'a pas de développement de Taylor, Maple peut parfois obtenir un développement, mais il faut utiliser la commande `series`. Réessayez.
4. La commande `series` permet aussi d'obtenir des développements asymptotiques. Essayez sur :
$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x - a\left(1 + \frac{b}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \exp(x^2\sqrt{x^2+1})$$
lorsque $x \to \infty$.
5. Calculez un développement en 1 puis en -1 de :
$$\frac{1}{1 - \exp(x^2)\exp(x)}.$$
Êtes-vous satisfait du résultat ?
6. Il est possible de récupérer la partie régulière d'un développement limité. Il faut utiliser la commande `convert(`*développement*`, polynom)`. Essayez sur le développement de $\tan(x)$ en 0.

7. Pour faire certaines manipulations, il est parfois utile de convertir un polynôme en développement. Cela se fait tout simplement à l'aide de la commande `series`. Toutefois, si on veut préciser à Maple que c'est bien un développement limité et pas une expression exacte, il faut éventuellement ajouter au polynôme un terme négligeable devant la précision du développement. Par exemple, convertissez le polynôme $1 - x + x^3$ en développement à l'ordre $O(x^6)$.

Exercice 3. Méthode des coefficients indéterminés

Soit $f : x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto x^2 + \tan(x)$.

1. On admet que f est bijective d'image $\mathbb{R}$ et que sa réciproque h est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que h admet un développement limité à tout ordre en 0.
   On cherche à calculer effectivement un développement limité de h.
2. Définir $H = \sum_{i=0}^{6} h_i x^i$, qui représentera le développement limité de h à l'ordre 6 avec des coefficients indéterminés.
3. Que vaut $f(h(x)) - x$? Calculer son développement limité à l'ordre 6 avec des coefficients indéterminés.
4. Que vaut $h(f(x)) - x$? Calculer son développement limité à l'ordre 6 avec des coefficients indéterminés.
5. On veut maintenant trouver les coefficients en résolvant un système d'équations qu'ils vérifient. Les deux développements précédents donnent chacun un tel système. Lequel vaut-il mieux utiliser et pourquoi ?
6. Extraire puis résoudre le système, en déduire le développement limité de h à l'ordre 6.

Exercice 4. Suites de Sturm

Définition 1. Soit P un polynôme sans facteur carré (i.e. premier avec sa dérivée), de degré n. On définit $P_0 = P$, $P_1 = P'$ et pour $k < n$, P_k est l'opposé du reste dans la division euclidienne de P_{k-2} par P_{k-1}. Pour $t \in \mathbb{R}$, soit $\sigma(t)$ le nombre de changement de signes dans la suite $P_0(t), P_1(t), \ldots, P_{n-1}(t)$ d'où on a enlevé tous les 0.

Théorème 1 (Sturm). *Soit P un polynôme sans facteur carré, et σ définie comme précédemment. Soit $a < b$ des réels qui ne sont pas racine de P. Alors $\sigma(a) - \sigma(b)$ est le nombre de racines réelles de P dans l'intervalle $[a, b]$.*

Le but est de programmer une utilisation de ce théorème.

1. Écrivez une procédure `PolySturm` qui prend en entrée un polynôme P et qui renvoie la liste des polynômes $[P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}]$.
2. Écrivez une procédure `ChangeSigne` qui prend en entrée une liste L et qui renvoie le nombre de changements de signe dans cette liste en ignorant les zéros.
3. Écrivez une procédure `sigma` qui prend en entrée un nombre t et une liste L de polynômes supposée être la suite de Sturm d'un polynôme, et qui renvoie $\sigma(t)$.
4. Testez votre procédure sur les polynômes P, Q, R, S, U, V.