TP 3 : Équations différentielles

Exercice 1. Quelques rappels

1. Définissez $q = e^{\pi\sqrt{163}}$, puis calculez une valeur approchée de q.
2. Augmentez le nombres de chiffres utilisés par Maple à 25, puis calculez une valeur approchée de $q - [q]$ (où $[\cdot]$ désigne la partie entière, voir `floor`). Peut-on en déduire que q est un entier ?
3. Répétez le même calcul avec 30 puis 35 chiffres significatifs. Conclusion ?
4. Définissez la fonction $f : x \mapsto \cos(x) + \tanh(2x^2)$. Calculez sa valeur en $\frac{1}{\pi}$, puis une valeur approchée de cette valeur. Tracez le graphe de f. Calculez les trois premières dérivées de f.
5. Définissez l'expression $E = x^3 - x - 1 + \sin(\frac{\pi x^2}{2})$. Calculez sa valeur en $\sqrt{3}$, puis une valeur approchée de cette valeur. Tracez la courbe $y = E$ pour $x \in [-2, 2]$. Calculez les trois premières dérivées de E.
6. Montrez que lorsque x est entier, la valeur de E est aussi un entier. Calculez le nombre d'entiers compris entre 1 et 100 tels que la valeur de E est un nombre premier.
7. Trouvez le plus petit entier naturel n tel que $f(n) \leq 0.01$ (on admettra qu'un tel n existe).

Exercice 2. Séquences et listes

1. En Maple, une *séquence* est une suite ordonnée d'éléments séparés par des virgules. Définissez `s1` la séquence $1, 2, 5, 7$, puis `s2` la séquence $f, E, 691$. Comme vous pouvez le voir, une séquence peut être constituée d'éléments de nature différente.
2. On concatène deux séquences en les séparant par une virgule. Définissez `s3` la séquence constituée des éléments de `s1` suivis de ceux de `s2`.
3. On peut accéder au `k`-ème élément d'une séquence `s` avec la commande `s[k]`. Testez sur les séquences précédentes.
4. On peut construire rapidement des séquences avec la commande `seq`. Après avoir regardé les exemple dans l'aide de cette commande, construire la séquence `s4` des fonctions $f - f(\frac{n}{10})$ pour n entier entre 5 et 10.
5. En Maple, une liste est une séquence entourée de crochets `[ ]`. Définissez les listes `L1=[s1]`, `L2=[s2]`, etc.
6. On peut retrouver la séquence sous-jacente à une liste avec la fonction `op`. Essayez.
7. La fonction `nops` renvoie le nombre d'élements d'une liste. Essayez.
8. Tracez sur un même graphe les courbes des fonctions de `L4`.

Exercice 3. Équations différentielles

1. Maple est capable de résoudre certaines équations différentielles. Voyons comment on écrit une équation différentielle. Copiez la commande suivante : `eq1 := diff(y(x),x)+1/2*y(x)=x`. Il s'agit de la représentation Maple de l'équation $y' + \frac{1}{2}y = x$. Remarquez que c'est une égalité entre expressions. Définissez de même l'équation 2 : $y' - \left(1 + \frac{2}{x^2}\right)y = \frac{1}{x}e^{x - \frac{2}{x}}$, l'équation 3 : $(x+1)y' + (x-1)y = 2x - 2$ et l'équation 4 : $(1 - x^2)y'' - 3xy' + 8y = 0$.

2. Ensuite, la commande Maple pour résoudre l'équation est `sol1 := dsolve(eq1,y(x))`. Résolvez les quatre équations précédentes. Remarquez que la solution est donnée sous forme d'une égalité, et que des constantes `_C1,_C2` apparaissent dans les solutions.
3. On peut récupérer la solution avec la commande `ysol1 := rhs(sol1)` (RHS = right hand side). Récupérez ainsi les solutions des quatre équations.
4. On peut ensuite facilement tracer plusieurs courbes solutions avec la commande `seq` qu'on vient de voir : par exemple, essayez `plot([seq(ysol1, _C1=-4..4)], x=-3..5)`.
5. Tracez plusieurs courbes de solutions de l'équation 2 sur $]0,5]$. Quelle est leur limite à l'infini ?
6. Tracez plusieurs courbes de solutions de l'équations 3 sur $[-4,8]$. Que conjecturez-vous sur la valeur d'une solution et de sa première dérivée en -1 ? Démontrez-le par un calcul Maple. Décrivez l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ passant par un point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
7. Tracez plusieurs courbes de solutions de l'équation 4 sur $]1,2]$. Décrire l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$.
8. On peut aussi calculer une solution avec des conditions initiales : par exemple essayez la commande `dsolve([eq1, y(0)=1], y(x))`.
9. Calculez une solution de l'équation 4 telle que $y(0) = y'(0) = 1$. Commentez le résultat donné par Maple.

Exercice 4. Tout ce qu'on vous a caché sur le pendule
On considère l'équation du pendule simple :

$$y''(t) + a \sin y(t) = 0 \quad (a > 0)$$

et on s'intéresse aux solutions vérifiant $y(0) = 0$ (le pendule part d'en bas).

1. Quelle est l'équation linéarisée des petites oscillations ? Résolvez-la avec Maple. Quelle est la période des solutions de l'équation linéarisée ?
2. On revient à l'équation générale. Demandez à Maple de la résoudre. Commentez la forme de la solution.
3. (Intégrale première d'énergie) Montrez que toute solution vérifie que $U(y, y')$ est constante au cours du temps, où $U(X,Y) = Y^2 - 2a\cos(X)$.
4. (Portrait de phase) Tracez sur un même graphe les courbes $U(X,Y) = K$ pour différentes valeurs de K, avec $a = 1$ (voir `implicitplot`). Augmentez le nombre de points pour avoir des courbes assez lisses (30000 points par exemple).
5. Pour quelles valeurs de U le pendule oscille-t-il ? Pour quelles valeurs effectue-t-il des rotations complètes ? En utilisant l'intégrale première d'énergie, retrouvez la formule donnée par Maple. Pour quelles valeurs de t est-elle valide ?
6. (Période de rotation complète) On se place dans le cas de rotation complète. Que vaut $y(t)$ lorsque le pendule a effectué une rotation complète ? Quel est le lien avec $y(T)$ où T est la période de rotation ? En utilisant la formule précédente, donnez une formule pour la période de rotation. Calculez une valeur approchée de cette période pour $a = 1$ et $y'(0) = 6$. Quelle serait la période sans gravitation ?
7. (Véritable période d'oscillation) On se place dans le cas d'oscillation. Soit τ le premier instant où on a $y'(\tau) = 0$. Par des considérations de symétrie, reliez τ à la période d'oscillation T. En utilisant l'intégrale première d'énergie, calculez $y(\tau)$. Comme à la question précédente, déduisez-en une formule pour τ, puis pour T. La période dépend-elle des conditions initiales ? Calculez une valeur approchée de cette période pour $a = 1$ et $y'(0) = 0.1$. Comparez-la à la période de l'équation linéarisée.