

TP 2 : structures de contrôle et procédures

Exercice 1. Rappels sur les affectations, et test conditionnel

1. Affectez 54321 à la variable `a`, 12345a à la variable `b`, $a^2 - 4b$ à la variable `c`. Affectez $7x$ à la variable `x`, commentez. Affectez $\frac{c-a}{789}$ à `x`, puis à nouveau $7x$ à `x`.
2. Consultez l'aide sur la commande `if`. En une seule commande, testez si `c` est divisible par 953 et affectez $263x$ à `x` si c'est le cas, et $263 + x$ à `x` sinon.
3. En une seule commande, retranchez 1 à `x` si $x > b$, multipliez-le par deux si $x < b$ et `x` est une fraction (voir `and`), et ajoutez-lui 1 sinon. Testez si `x` est premier.

Exercice 2. Boucles

1. Consultez l'aide sur la commande `for`. Affichez les entiers de 1 à 10. Affichez la valeur de la variable que vous avez utilisé dans la boucle, commentez. Affichez les entiers compris entre 10 et 1 dans l'ordre décroissant.
2. Affichez les entiers `i` compris entre 1 et 100 tels que $i^2 \equiv 18 \pmod{31}$.
3. On utilise la commande `while condition do instruction end do` pour répéter l'instruction tant que la condition est vérifiée. Affectez 14889096 à `n`. En une seule commande, tant que `n` est divisible par 3, divisez-le par 3. Affichez la valeur de `n`.
4. Calculez le plus grand entier `n` tel que $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} < 10$.

Exercice 3. Procédures

1. Une procédure est un objet qui prend un ou plusieurs arguments en entrée, fait quelque chose, et renvoie éventuellement une valeur. En Maple on écrit une procédure ainsi :

```
nom := proc (arg1, arg2, ...)
  instructions
  ...
  return valeur;
end;
```

Écrivez une procédure `poly` qui prend en entrée un nombre `z`, et qui renvoie le polynôme $(X - z)(X - z - 1)(X - z + 1)(X - 2z)$ développé. Calculez `poly(1)` puis `poly(123)`.
2. Écrivez une procédure `deprime` qui prend en entrée un entier `n`, et qui renvoie `n + 1` si `n` est premier, et `n - 2` sinon. Calculez en une seule commande les valeurs `deprime(i)` pour $1 \leq i \leq 10$.
3. Écrivez une procédure `ajout` qui prend en entrée un nombre `a`, qui affecte `a + 1` à `a` puis qui renvoie `a`. Calculez `ajout(2)`, commentez.
4. En fait, on ne peut pas affecter une variable utilisée comme argument. Il faut affecter une autre variable, interne à la procédure ; on parle de variable *locale*. En Maple, pour utiliser une variable locale, on doit la déclarer au début de la procédure avec la commande `local var1, var2, ...` placée juste après le nom de la procédure et des arguments. Écrivez une procédure `ajout2` qui prend en argument un entier `a`, qui utilise une variable locale `b`, qui affecte `a` à `b`, qui élève `b` au carré puis qui renvoie `b`. Testez les valeurs de `a` et `b`. Si elles ne sont pas affectées (par exemple si vous avez fait un `restart` depuis le premier exercice), donnez-leur une valeur. Calculez `ajout2(7)`. Testez les valeurs de `a` et `b`, commentez.

Exercice 4. Procédures avec boucles

1. Étant donnée une valeur initiale $x_0 \in [0, 1]$ on définit par récurrence la suite (x_n) par $x_{n+1} = 3.5x_n(1 - x_n)$. Écrivez une procédure `itere` qui prend en argument `x0` et `n` et qui renvoie la valeur x_n . Calculez les 40 premiers termes de la suite pour $x_0 = 0.1$.
2. Étant donné un réel $a > 0$ on définit la suite (y_n) par $y_0 = 1$ et $y_{n+1} = \frac{1}{2}(y_n + \frac{a}{y_n})$. On admet que la suite converge alors vers \sqrt{a} . Soit $x > 0$, montrer que si $|x^2 - a| < \varepsilon$ alors $|x - \sqrt{a}| < \frac{\varepsilon}{x}$ (penser au conjugué). Écrire une procédure `racine` qui prend en entrée des réels positifs `a` et `eps` et qui renvoie une approximation à `eps` près de \sqrt{a} . Vérifiez les valeurs obtenues avec la fonction `sqrt` de Maple.

Exercice 5. Procédures avancées

1. Écrire une procédure `DeuxCarres` qui prend en entrée un entier `m`, et qui renvoie `true` ou `false` selon qu'il existe deux entiers x, y tels que $x^2 + y^2 = m$. Testez sur les nombres entiers entre 1 et 20. Testez sur les nombres premiers entre 1 et 50, et comparez avec les valeurs de ces nombres premiers modulo 4, commentez.
2. On considère l'algorithme suivant : partant d'un nombre entier, on le divise par deux s'il est pair et on le multiplie par trois et on ajoute un s'il est impair ; on s'arrête quand on arrive à 1. Écrivez une procédure `Syracuse` qui prend en entrée un nombre entier `k` et qui compte le nombre d'étapes utilisées avant d'arriver à 1. Calculez les valeurs de votre procédure sur les entiers entre 2 et 30.

Exercice 6. Deux suites

1. Soit $P_n = X \prod_{k=1}^n (1 - X^k)^2 (1 - X^{11k})^2$, et a_n le coefficient devant X^n dans P_n (voir `coeff`). Écrivez une procédure `A` qui prend en entrée un entier `n` et qui renvoie a_n . Calculez les 20 premiers coefficients a_n .
2. Calculez les 100 premières valeurs de $\frac{|a_n|}{2\sqrt{n}}$. Que remarquez-vous ?
3. Écrivez une procédure `B` qui prend en entrée un entier $n \geq 2$ et qui renvoie le nombre de couples d'entiers $0 \leq x, y \leq n - 1$ qui vérifient $y^2 - y \equiv x^3 - x^2 \pmod{n}$, et on note aussi $b_n = B(n)$. Calculez les 20 premières valeurs de `B`.
4. Pour les 20 premiers nombres premiers p (voir `nextprime`), calculez $a_p + b_p$. Que remarquez-vous ?
5. Calculez les valeurs de $\frac{a_n a_m}{a_{nm}}$ pour tout $2 \leq n < m \leq 20$ premiers entre eux. Remarque ?