DM pour le 31/01/11

Exercice 1. Calcul formel
Étant donné une fraction rationnelle, les commandes Maple `numer` et `denom` renvoient respectivement le numérateur et le dénominateur de cette fraction.

1. Écrivez une commande Maple qui définit la fraction rationnelle (**expression**)
$$F = \frac{14x^4 - 926x^3 + 22933x^2 - 252033x + 1037069}{x^4 - 66x^3 + 1631x^2 - 17886x + 73440}.$$
2. Écrivez une commande Maple qui calcule de façon exacte les pôles de F. Le résultat de Maple est $16, 17, 18, 15$.
3. Écrivez une commande Maple qui calcule de façon approchée les zéros de la dérivée de F, puis la valeur de F en ces zéros. Maple renvoie $14.54516362, 15.24369550$ puis $14.91636611, 17.01038024$.
4. La fraction F admet-elle une limite en $\pm\infty$ et si oui laquelle ?
5. Écrivez une commande qui trace le graphe de F, en choisissant soigneusement les options et en justifiant votre choix.

Exercice 2. Programmation

1. Écrivez une commande Maple qui calcule le nombre d'entiers $n \leq 10000$ tels que n et $2n+1$ sont premiers.
2. Écrivez une commande Maple qui calcule le plus petit entier $k \geq 0$ tel que $k \equiv 5 \pmod{691}$ et $0.7 \leq \cos(k) \leq 0.8$.
3. Que calcule la procédure suivante ?
```
f := proc(n)
  if n<0 then return f(1-n)+1
  elif n=0 then return 1
  else return 3*f(n-2)
  end if:
end;
```

Problème. Dénombrement
Dans tout ce problème, il est **interdit d'utiliser les commandes Maple** `^`, `!` et `binomial`. Pour tout entier strictement positif n, on écrira $I_n = \{1, \ldots, n\}$.

Rappel : on peut concaténer deux listes `L1` et `L2` par la commande `[op(L1),op(L2)]` et ajouter un élément `a` à la fin d'une liste `L` par la commande `[op(L),a]`.

A) Calcul de cardinaux

1. Ensemble des parties
   a) Rappelez le cardinal de $\mathcal{P}(I_n)$.
   b) Écrivez une procédure **récursive** `CardinalParties` qui prend en argument un entier n et qui renvoie le cardinal de $\mathcal{P}(I_n)$.
2. Ensemble des parties à p éléments
   a) Écrivez une procédure `Factorielle` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de $n!$.
   b) Rappelez la formule exprimant le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ à l'aide de la factorielle.
   c) Écrivez une procédure `CardinalPartiesP` qui prend en argument deux entiers p et n et renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{p}$ en utilisant la formule précédente.
   d) Rappelez la formule du triangle de Pascal.
   e) Écrivez une procédure **récursive** `RecCardinalPartiesP` qui prend en argument deux entiers p et n et renvoie la valeur du coefficient binomial $\binom{n}{p}$ en utilisant la formule du triangle de Pascal.
   f) Décrivez précisément quels sont les appels récursifs de la procédure `RecCardinalPartiesP` qui sont faits lorsqu'on lance `RecCardinalPartiesP(3,6)`.
   g) Que pourrait-on ajouter à la procédure `RecCardinalPartiesP` pour améliorer son efficacité ?

B) Calcul d'ensembles de parties

1. Ensemble des parties
   a) Comment obtient-on les parties de I_n lorsqu'on connait les parties de I_{n-1} ?
   b) Écrivez une procédure `Parties` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la liste des parties de I_n, données elles aussi sous forme de liste. Par exemple, `Parties(2);` doit renvoyer `[[],[1],[2],[1,2]]` (on ne s'occupera pas de l'ordre dans lequel les parties apparaissent).
2. Ensemble des parties à p éléments
   a) En vous inspirant de la démonstration de la formule de Pascal, expliquez comment on peut obtenir les parties à p éléments de I_n à partir des parties à certains nombres d'éléments de I_{n-1}.
   b) Écrivez une procédure `PartiesP` qui prend en argument deux entiers p et n et qui renvoie la liste des parties à p éléments de I_n. Par exemple, `PartiesP(2,4)` doit renvoyer (éventuellement dans un autre ordre) `[[1,2],[1,3],[2,3],[1,4],[2,4],[3,4]]`.

C) Questions facultatives

1. Estimez le nombre d'appels récursifs effectués par votre procédure `CardinalParties` en fonction de n.
2. Estimez le nombre d'appels récursifs effectués par votre procédure `CardinalPartiesP` en fonction de p et n.