TP 4 : réduction

Exercice 1. Un endomorphisme sur l'espace des polynômes
Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg Q \leq 2$, et $d \geq 2$. On pose :

$$\Phi_Q : \begin{cases} \mathbb{R}_d[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X] \\ \quad P \longmapsto X^d P(\frac{1}{X}) + P(X+1) + QP'' \end{cases}$$

1. Vérifiez que Φ_Q est bien définie et linéaire.
2. Ecrivez une procédure qui prend d, Q en entrée et qui renvoie la matrice de Φ_Q dans la base des $(X^n)_n$.
3. Testez votre procédure pour $d \in \{2, 3\}$, $Q \in \{0, X\}$ et vérifiez le résultat.
4. Calculez une valeur approchée des éléments propres de Φ_Q avec $d = 4$ et $Q = X^2 + X + 1$.

Exercice 2. Etude de quelques endomorphismes

1. Soit $M = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$. Calculez les éléments propres de M. M est-elle diagonalisable ? Trouvez une base dans laquelle M est triangulaire supérieure, puis trouvez une base dans laquelle M est triangulaire supérieure et dans laquelle le coefficient surdiagonal est 1.
2. Soit $M_2 = \begin{bmatrix} 35 & -116 \\ 10 & -33 \end{bmatrix}$. Calculez les éléments propres de M_2. M_2 est-elle diagonalisable dans $\mathbb{C}$? dans $\mathbb{R}$?
   Trouver une base dans laquelle M_2 est de la forme $\begin{bmatrix} a\cos\theta & -a\sin\theta \\ a\sin\theta & a\cos\theta \end{bmatrix}$
3. Soit $M_3 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ et $M_4 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.
   a) Calculez les éléments propres de M_3 et M_4. Sont-elles diagonalisables ? Peut-on conclure que M_3 et M_4 sont semblables ?
   b) On appelle e_1 et e_3 deux vecteurs propres indépendants de M_3. Trouver deux vecteurs e_2 et e_4 tels que $M_3 e_2 = 3e_2 + e_1$ et $M_3 e_4 = 3e_4 + e_3$ (voir `LinearSolve`) et montrer que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Que vaut la matrice de M_3 dans cette base ? Que vaut le polynôme minimal de M_3 ?
   c) On appelle f_1 et f_4 deux vecteurs propres indépendants de M_4. Trouver un vecteur f_2 tel que $M_4 f_2 = 3f_2 + f_i$ et un vecteur f_3 tel que $M_4 f_3 = 3f_3 + f_2$, où $i = 1$ ou 4. Si besoin, échangez f_1 et f_4 de sorte que $i = 1$. Montrer que (f_1, f_2, f_3, f_4) est une base de $\mathbb{R}^4$. Que vaut la matrice de M_4 dans cette base ? Que vaut le polynôme minimal de M_4 ?
   d) M_3 et M_4 sont-elles semblables ?

Exercice 3. Décomposition de Dunford
On cherche à étudier la décomposition suivante :

Théorème 1. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors il existe $d, n \in \mathbb{C}[u]$ (en particulier d et n commutent) tels que d est diagonalisable, n est nilpotente et*

$$u = d + n.$$

De plus d, n sont les uniques respectivement diagonalisable et nilpotent qui commutent et vérifient $u = d + n$.

Nous allons admettre ce théorème et chercher un moyen de calculer d et n.

Théorème 2. *Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie r, $u \in \mathcal{L}(E)$. On pose $P = \frac{\chi_u}{\mathrm{pgcd}(\chi_u, \chi_u')}$, et on définit la suite d'endomorphismes (u_k) par $u_0 = u$ et*

$$u_{k+1} = u_k - P'(u_k)^{-1} P(u_k).$$

Alors cette suite est bien définie et $u_r = d$ où d est tel que dans le théorème précédent.

1. En admettant le second théorème, écrivez une procédure qui prend en entrée une matrice U, et renvoie D, N tels que dans le premier théorème.

2. Démontrez soigneusement que u est diagonalisable si et seulement si $n = 0$. On a donc obtenu un critère pour savoir si une matrice est diagonalisable sans avoir à calculer les valeurs propres !
3. Reprenez les matrices de l'exercice 2. et étudiez leur diagonalisabilité avec votre procédure, et trouvez leur polynôme minimal.
4. Soit $M_5 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calculez sa décomposition de Dunford $M_5 = D_5 + N_5$. Calculez le polynôme caractéristique de D_5, en déduire à quelle matrice diagonale elle est semblable. Calculez le polynôme minimal de N_5. Paut-on en déduire le polynôme minimal de M_5 ?
5. (difficile) Nous allons maintenant démontrer le second théorème.
   a) Soit $v \in \mathcal{L}(E)$, P, Q des polynômes tel que $P(v) = 0$ et $\text{pgcd}(P, Q) = 1$. Montrez que $Q(v)$ est inversible et $Q(v)^{-1} \in \mathbb{C}[v]$
   b) Montrez par récurrence sur k que u_k est bien défini, que $u_k \in \mathbb{C}[u]$, que $P^{2^{r-k}}(u_k) = 0$ et que $u - u_k$ est nilpotente.
   c) Conclure.