# TP 3 : algèbre linéaire en Maple

**Exercice 1. Opérations élémentaires**

1. Chargez le package `LinearAlgebra`.
2. Définissez les matrices suivantes (voir `Matrix`) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \; ; \; E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Calculez $A+B$, $3A$, $AC$, $EB$, $A^3$.
4. Définissez $R1, R2$ des matrices aléatoires de tailles $5 \times 7$ et $7 \times 5$, et $R = R2 \cdot R1$ (de taille $7 \times 7$).
5. Définissez la matrice $H = (h_{ij})$ de taille $10 \times 10$ avec $h_{ij} = \frac{1}{i+j}$.
6. Définissez la matrice $J$ donnée par les lignes impaires et les colonnes paires de $H$ (voir `SubMatrix`).
7. Construire la matrice par blocs $K = [A, B]$.

**Exercice 2. Calculs sur les matrices**

1. Calculez la trace et le déterminant de $A$,$B$,$R$,$H$,$J$. Calculez l'inverse de celles qui sont inversibles.
2. Calculez le rang, une base du noyau, une base de l'images de $A$, $R1$, $R2$, $R$, $K$. (voir `Rank`, `NullSpace`, `ColumnSpace`) Comparez les résultats obtenus pour $R1$, $R2$, $R$, lorsque cela a un sens.
3. Calculez le polynôme caractéristique de $A$, $B$, $R$, $H$. (voir `CharacteristicPolynomial`)
4. Calculez les éléments propres de $A$ et $B$. (voir `Eigenvectors`)
5. Calculez une valeur approchée des valeurs propres de $R$ et $H$. Sont-elles diagonalisables ?

**Exercice 3. Etude d'un opérateur linéaire**
Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit :

$$f_M : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto XM - MX \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

1. Ecrivez une procédure `Matf` qui prend en entrée une matrice $M$ de taille $n \times n$ et qui renvoie la matrice de taille $n^2 \times n^2$ de $f_M$ dans la base canonique $E_{i,j} = F_{i+n(j-1)}$.
2. Calculez les valeurs propres de $f_A$ et de $f_B$. Conjecturez une relation entre les valeurs propres de $M$ et celles de $f_M$.
3. Testez la validité de votre conjecture pour $R$ et $H$ avec des valeurs approchées.

**Exercice 4. Pivot de Gauss**

1. Chargez le package `Student[LinearAlgebra]`.
2. Ecrivez une procédure `cherche_pivot` qui prend en entrée une matrice $M$ de taille $k \times n$ et deux entiers $i$ et $j$, et qui renvoie le premier indice $i_0 \geq i$ tel que $M_{i_0,j} \neq 0$ s'il existe, et $k+1$ sinon.
3. Ecrivez une procédure `pivote` qui prend en entrée une matrice $M$ de taille $k \times n$ et deux entiers $i$ et $j$, et qui renvoie $b, N$ tels que si la colonne $M_{\cdot,j}$ est nulle à partir de $i$, alors $b$ vaut `false` et $N = M$, et sinon $b$ vaut `true` et $N$ est une matrice équivalente à $M$, ayant les mêmes $j-1$ premières colonnes, dont la colonne $N_{\cdot,j}$ est nulle à partir de $i$. (voir `AddRow`, `SwapRow`)
4. Ecrivez une procédure `echelon` qui prend en entrée une matrice $M$ de taille $k \times n$, et qui renvoie la matrice $N$ échelonnée, équivalente à $M$, obtenue par l'algorithme du pivot de Gauss.
5. Modifiez les procédures précédentes de sorte à obtenir aussi le rang de $M$.
6. Modifiez les procédures précédentes de sorte à obtenir aussi le déterminant de $M$.
7. Utilisez votre procédure pour calculer le polynôme caractéristique de $J$.