# TP 2 : développements limités en Maple

**Exercice 1. Utilisation élémentaire**

1. La commande de base pour calculer un développement limité est `taylor`. Testez en $x = 0$ et en $x = 1$ sur $\exp(x)$, $\cosh(x)$, $\cos(\sin(x))$.
2. Essayez à nouveau en 0 et en 1 sur $\frac{x+2}{x^2-1}$ et $\sqrt{2x^2 - 3x + 1}$. Que se passe-t-il ?
3. Lorsqu'une expression n'a pas de développement de Taylor, Maple peut parfois obtenir un développement, mais il faut utiliser la commande `series`. Réessayez.
4. La commande `series` permet aussi d'obtenir des développements asymptotiques. Essayez sur :

$$f(x) = \left(\frac{x+1}{x-2}\right)^x - a\left(1 + \frac{b}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) = \exp(x^2\sqrt{x^2+1})$$

   lorsque $x \to \infty$.

**Exercice 2. Polynômes et développements limités**

1. Il est possible de récupérer la partie régulière d'un développement limité. Il faut utiliser la commande `convert(`*développement*`, polynom)`. Essayez sur le développement de $\tan(x)$ en 0.
2. Pour faire certaines manipulations, il est parfois utile de convertir un polynôme en développement. Cela se fait tout simplement à l'aide de la commande `series`. Toutefois, si on veut préciser à Maple que c'est bien un développement limité et pas une expression exacte, il faut éventuellement ajouter au polynôme un terme négligeable devant la précision du développement. Par exemple, convertissez le polynôme $1 - x + x^3$ en développement à l'ordre $O(x^6)$.
3. Pour $a \in \mathbb{C}$, l'espace $\mathbb{C}_n[X]$ des polynômes de degré au plus $n$ dispose d'une base $((X-a)^k)_{0\leq k\leq n}$. En toute généralité, pour exprimer un élément d'un espace vectoriel en fonction des éléments d'une base, il faut inverser un système linéaire. Cependant, dans ce cas particulier, on a un moyen bien plus simple. Trouvez-le et exprimez $P = X^7 - 12X^5 + X^2 + 1$ dans la base $((X-1)^k)_{0\leq k\leq 7}$.

**Exercice 3. Utiliser Maple ne dispense pas de réfléchir**

1. Calculez un développement en 1 puis en $-1$ de :

$$\frac{1}{1 - \exp(x^2)\exp(x)}$$

2. On définit les fonctions :

$$\begin{aligned} f(x) \quad = \quad & \tan(\tanh(\sin(x))) + \tanh(\sin(\tan(x))) + \sin(\tan(\tanh(x))) - \tan(\sin(\tanh(x))) \\ & - \sin(\tanh(\tan(x))) - \tanh(\tan(\sin(x))) - \tan(\sinh(\tanh(x))) - \sinh(\tanh(\tan(x))) \\ & - \tanh(\tan(\sinh(x))) + \tan(\tanh(\sinh(x))) + \tanh(\sinh(\tan(x))) + \sinh(\tan(\tanh(x))) \end{aligned}$$

   et

$$\begin{aligned} g(x) \quad = \quad & \sinh(\tanh(\sin(x))) + \tanh(\sin(\sinh(x))) + \sin(\sinh(\tanh(x))) - \sinh(\sin(\tanh(x))) \\ & - \sin(\tanh(\sinh(x))) - \tanh(\sinh(\sin(x))) - \tan(\sinh(\sin(x))) - \sinh(\sin(\tan(x))) \\ & - \sin(\tan(\sinh(x))) + \tan(\sin(\sinh(x))) + \sin(\sinh(\tan(x))) + \sinh(\tan(\sin(x))) \end{aligned}$$

   Que vaut

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(g(x))}{g(f(x))}$$

   avec 9 décimales de précision ?

**Exercice 4. Méthode par coefficients indéterminés**
Soit $f : x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[ \mapsto x^2 + \tan(x)$.

1. Montrer que $f$ est bijective d'image $\mathbb{R}$ (on pourra utiliser un calcul d'une valeur approchée), et que sa réciproque $h$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que $h$ admet un développement limité à tout ordre en 0.
   On cherche à calculer effectivement un développement limité de $h$.
2. Définir une variable contenant le développement limité de $h$ à l'ordre 6, sous forme de coefficients indéterminés `h[i]`.
3. Que vaut $f(h(x)) - x$ ? Calculer son développement limité à l'ordre 6 avec des coefficients indéterminés.
4. Que vaut $h(f(x)) - x$ ? Calculer son développement limité à l'ordre 6 avec des coefficients indéterminés.
5. On veut maintenant trouver les coefficients en résolvant un système d'équations qu'ils vérifient. Les deux développements précédents donnent chacun un tel système. Lequel vaut-il mieux utiliser et pourquoi ?
6. Résoudre le système, en déduire le développement limité de $h$ à l'ordre 6.

**Exercice 5. Méthode par itération**
Voici un exercice posé à Centrale en 2008 :

Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 + x^5$.

1. Montrer qu'il existe $\alpha < 0$ et $\beta > 0$ tels que pour $E = ]\alpha, 0[\cup]0, \beta[$, pour tout $x \in E$, il existe un unique $y \neq x$ tel que $f(y) = f(x)$. On note $g(x)$ ce $y$.
2. Montrer que $g$ est continue, décroissante, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E$ et prolongeable par continuité en 0.
3. Montrer que $g(x) \sim -x$ en 0.
4. Montrer que $g(x) = -x + ax^p + o(x^p)$ avec $p > 1$ et $a \neq 0$.
5. Montrer que $g(x) = -x + ax^p + bx^q + o(x^q)$ avec $q > p$ et $b \neq 0$.

Etudions cet exercice à l'aide de Maple.

1. Tracer la courbe représentative de $f$ avec des bornes bien choisies.
2. Expliquer rapidement les arguments à utiliser pour la première et la deuxième question.
3. Ecrire l'équation vérifiée par $g$. Trouver un équivalent en 0 de $x^2 + x^5$. Trouver un équivalent en 0 de $g(x)^2 + g(x)^5$. Quelle relation y a-t-il entre le signe de $x$ et celui de $g(x)$ ? Résoudre la troisième question.
4. A partir de l'équation vérifiée par $g$, exprimer $g(x)$ en fonction de $x$ et de $g(x)^5$.
5. En injectant dans cette expression les développements successifs obtenus pour $g$, résoudre les dernières questions.
6. Trouver un développement de $g$ en 0 à la précision $O(x^{17})$.

**Exercice 6. Méthode par récurrence**
Soit $\lambda > 0$ et $(E) : y'' + (x^2 + \lambda^2)y = 0$. On admet que $(E)$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

1. Montrer que $y$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $y$ admet un DL à tout ordre en 0.
3. Calculer $y''(0)$ et $y'''(0)$.
4. Trouver une relation de récurrence sur les coefficients du développement limité, en justifiant soigneusement.
5. Programmer une procédure Maple qui prend $n$ et $\lambda$ en entrée et renvoie le coefficient de $x^n$. Calculer une valeur approchée à 10 décimales du coefficient de $x^{100}$ pour $\lambda = 1$.

**Exercice 7. Méthode de Newton**
Soit $\phi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On cherche à trouver un développement limité de solutions $y(x)$ de l'équation $\phi(x, y(x)) = 0$. On va utiliser une méthode itérative générale, la méthode de Newton.

**Théorème** *Soit $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $\phi(0,0) = 0$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) \neq 0$.
On suppose de plus que l'équation $\phi(x, y(x)) = 0$ admet une solution $y$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $y(0) = 0$.
Alors la partie régulière $(y_k)$ du développement limité en 0 à l'ordre $2^k$ de $y$ vérifie :*

$$\forall k \geq 0,\ y_{k+1} = y_k - \frac{\phi(x, y_k)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y_k)} + O(x^{2^{k+1}}).$$

1. On admet pour le moment ce théorème. Ecrire une procédure Maple qui prend en argument $\phi$ et $n$ (qui sont supposées vérifier les hypothèses du théorème), et qui renvoie le développement limité en 0 à l'ordre $2^n$ de la solution $y$ de $\phi(x, y(x)) = 0$.
2. Vérifiez le fonctionnement de votre procédure avec $\phi(x, y) = (1 - x)y - 1$ et $\phi(x, y) = (1 + y)^2 - (1 + x)$.
3. Utilisez votre procédure pour retrouver le résultat de l'exercice 4 en utilisant $\phi(x, y) = f(y) - x$. (Le théorème reste valable pour un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.)
4. (difficile) Démontrer le théorème.