TP 2 : développements limités en Maple

Théorème 1. *Soit $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, telle que $\phi(0,0) = 0$ et $\frac{\partial \phi}{\partial y}(0,0) \neq 0$.*
On suppose de plus que l'équation $\phi(x, y(x)) = 0$ admet une solution y de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que $y(0) = 0$.
Alors la partie régulière (y_k) du développement limité en 0 à l'ordre 2^k de y vérifie :

$$\forall k \geq 0,\ \ y_{k+1} = y_k - \frac{\phi(x, y_k)}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y_k)} + O(x^{2^{k+1}}).$$

Démonstration. La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en y_k donne :

$$\phi(x, y_{k+1}) = \phi(x, y_k) - (y_k - y_{k+1})\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y_k) + O((y_k - y_{k+1})^2).$$

Or

$$y_k - y_{k+1} = O(x^{2^k})$$

par définition des y_k. Donc

$$\phi(x, y_{k+1}) = \phi(x, y_k) - (y_k - y_{k+1})\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y_k) + O(x^{2^{k+1}}).$$

Le théorème est donc équivalent à

$$\forall k,\ \ \phi(x, y_k) = O(x^{2^k}).$$

La formule de Taylor-Young à l'ordre 1 en y donne :

$$\begin{aligned}
\phi(x, y_k) &= \phi(x, y) + (y_k - y)\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) + O((y_k - y)^2) \\
&= O(x^{2^k})\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) + O(x^{2^k}) \\
&= O(x^{2^k}).
\end{aligned}$$

□