

Réurrences, méthode de Miller

AFAE 2015–2016

Ces notes sont très largement inspiré du livre de Jet Wimp, *Computation with Recurrence Relations*, (Pitman, 1984), chapitres 1 à 5.

Introduction

Exemple. Soit

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}.$$

On a bien sûr $S(n) \rightarrow e$ quand $n \rightarrow \infty$, et $e - S(n)$ est de l'ordre de $1/n!$. Posons $\delta(n) = n!(e - S(n))$, de sorte que $\delta(n) \rightarrow 1$. On a

$$S(n+1) - S(n) = \frac{1}{n!}$$

donc

$$(e - S(n+1)) - (e - S(n)) = S(n) - S(n+1) = -\frac{1}{n!}$$

et

$$\delta(n+1) = (n+1)(\delta(n) - 1).$$

Avec dix chiffres significatifs et en partant de $\delta(0) = e$, on calcule (chiffres corrects en gras) :

$$\delta(0) \approx \mathbf{2.718281828},$$

$$\delta(1) \approx \mathbf{1.718281828},$$

$$\delta(2) \approx \mathbf{1.436563656},$$

⋮

$$\delta(10) \approx \mathbf{1.097446400},$$

$$\delta(11) \approx \mathbf{1.071910400},$$

$$\delta(12) \approx 0.862924800,$$

$$\delta(13) \approx -1.781977600, \quad (!)$$

⋮

$$\delta(20) \approx -1.116812074 \cdot 10^9.$$

Bref, la récurrence a l'air inutilisable pour calculer $\delta(n)$.

L'objet de ce cours est d'expliquer d'où vient ce phénomène et que faire pour l'éviter.

1 Rappels sur les récurrences linéaires

Définition. Une *récurrence linéaire* est une équation de la forme

$$a_r(n)u(n+r) + \dots + a_1(n)u(n+1) + a_0(n)u(n) = b(n), \quad (1)$$

où $a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_r \neq 0$ sont des suites à valeurs (disons) dans \mathbb{R} . L'entier r s'appelle l'*ordre* de la récurrence, les a_i les *coefficients*, a_r le coefficient de tête, a_0 le coefficient de queue, et b le *second membre*. La récurrence est dite *homogène* si $b = 0$, *inhomogène* sinon. Une suite $(u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est *solution* de la récurrence si la relation (1) est satisfaite pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque. L'ensemble \mathcal{I} parcouru par les indices (le domaine de définition des solutions cherchées) a son importance. Par exemple, la suite $((n-1)!)_{n \geq 1}$ est solution de $u(n+1) = nu(n)$ avec $\mathcal{I} = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Cependant, les seules solutions avec $\mathcal{I} = \mathbb{N}$ sont les suites de la forme $(u(0), 0, 0, 0, \dots)$. En effet, la récurrence évaluée en $n=0$ donne $u(1) = 0$ indépendamment de $u(0)$, et à partir de là $u(n) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Proposition. Supposons $a_r(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Les solutions de la récurrence homogène

$$a_r(n)u(n+r) + \dots + a_1(n)u(n+1) + a_0(n)u(n) = 0 \quad (2)$$

forment un espace vectoriel de dimension r . Une solution quelconque $(u(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est caractérisée par le vecteur de conditions initiales $(u(0), u(1), \dots, u(r-1))$.

2. Plus généralement, les solutions de la récurrence inhomogène (1) forment un espace affine de dimension r . Si $(u_{\text{part}}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution de (1), les solutions sont exactement les suites de la forme $u_{\text{part}}(n) + u_{\text{gen}}(n)$, où u_{gen} est une solution de la *partie homogène* (2).

La proposition s'étend à tout $I = \llbracket n_0, \infty \llbracket$ moyennant un décalage de la variable n .

Dans le cas d'une récurrence homogène à coefficients constants

$$a_r u(n+r) + \dots + a_1 u(n+1) + a_0 u(n) = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

le polynôme $\chi = a_r X^r + \dots + a_1 X + a_0$ est appelé polynôme caractéristique de la récurrence et joue un rôle important dans l'étude de ses solutions.

Proposition. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ les racines complexes de χ , et m_1, \dots, m_s leurs multiplicités respectives. Alors les suites

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1^n, & n \alpha_1^n, & \dots, & n^{m_1-1} \alpha_1^n, \\ \alpha_2^n, & n \alpha_2^n, & \dots, & n^{m_2-1} \alpha_2^n, \\ \vdots & & & \\ \alpha_s^n, & n \alpha_s^n, & \dots, & n^{m_s-1} \alpha_s^n \end{array}$$

forment une base de solutions de la récurrence homogène à coefficients constants (3).

Autrement dit, la solution générale de (3) s'écrit

$$u(n) = p_1(n) \alpha_1^n + \dots + p_s(n) \alpha_s^n$$

où chaque p_i est un polynôme avec $\deg p_i < m_i$. En particulier, si le polynôme χ est à racines simples, les solutions de (3) sont les combinaisons linéaires des suites géométriques $\alpha_1^n, \dots, \alpha_s^n$.

2 Asymptotique et conditionnement

2.1 Solutions dominantes, solutions minimales

Considérons à nouveau une récurrence homogène à coefficients variables

$$a_r(n)u(n+r) + \dots + a_1(n)u(n+1) + a_0(n)u(n) = 0 \quad (4)$$

et supposons $a_r(n) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition. Une solution non nulle u_1 de (4) est dite *minimale* si on peut la compléter en une base de solutions (u_1, \dots, u_r) de sorte que

$$\forall k \neq 1, \quad u_1(n) = o(u_k(n)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Elle est dite *dominante* s'il existe une base (u_1, \dots, u_r) telle que

$$\forall k \neq 1, \quad u_k(n) = o(u_1(n)) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Exemples.

1. La récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ a pour solution générale

$$u_n = \lambda \varphi^n + \mu \bar{\varphi}^n$$

où

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618, \quad \bar{\varphi} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0.618.$$

La suite $(\bar{\varphi}^n)$ est une solution minimale. La suite (φ^n) est une solution dominante. La suite de Fibonacci

$$(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots) = \left(\frac{\varphi^n - \bar{\varphi}^n}{\sqrt{5}} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

est une autre solution dominante.

2. La récurrence $u_{n+2} = u_n$ a pour solution générale $\lambda + \mu(-1)^n$: elle n'a ni solution dominante, ni solution minimale.

Remarques.

1. Si u est solution minimale, on a $u(n) = o(v(n))$ pour toute solution v non colinéaire à u .
2. Les solutions minimales (quand il en existe) forment un sous-espace vectoriel de dimension 1 de l'espace des solutions.
3. S'il existe une solution dominante u , alors toute solution de la forme $\lambda u + v$ avec v linéairement indépendante de u et $\lambda \neq 0$ est aussi une solution dominante, et donc *presque toute* solution est dominante.

Le résultat suivant représente la situation modèle qu'il faut avoir en tête. C'est une généralisation de l'exemple 1 ci-dessus. Le point 2 illustre que les choses peuvent être plus compliquées quand les α_i ne sont pas de modules deux à deux distincts.

Proposition. Considérons une récurrence homogène à coefficients constants de polynôme caractéristique

$$(X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r), \quad \alpha_i \in \mathbb{C},$$

et supposons

$$|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_r|.$$

Soit

$$u(n) = \lambda_1 \alpha_1^n + \cdots + \lambda_r \alpha_r^n$$

une solution non nulle. La solution $u(n)$ est dominante si et seulement si $\lambda_1 \neq 0$, et l'on a alors

$$u(n) \sim \lambda_1 \alpha_1^n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Elle est minimale si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{r-1} = 0$, c'est-à-dire $u(n) = \lambda_r \alpha_r^n$.

Dans le cas de récurrences inhomogènes, la définition de solution minimale ci-dessus ne s'applique pas. On la remplacera souvent par celle de solution négligeable devant les solutions de la partie homogène, ce qui est possible même pour une récurrence du premier ordre.

Exemple. Reprenons l'exemple du début du cours :

$$u(n+1) - (n+1)u(n) = n+1. \quad (5)$$

La solution $\delta(n)$ correspond à la condition initiale $\delta(0) = e$, et tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Mais la partie homogène de la récurrence admet pour solution $n!$, et la solution générale de la récurrence inhomogène est donc $u(n) = \delta(n) + \lambda n!$.

2.2 Conditionnement des récurrences

Quel rapport avec les problèmes de stabilité numérique ? L'idée générale est que plus une solution d'une récurrence est « petite » devant les autres, plus son calcul par récurrence à partir des conditions initiales est *mal conditionné* (numériquement instable).

Exemple. Supposons que l'on démarre le calcul de la solution $\delta(n)$ de (5) avec une valeur approchée de la condition initiale, $u(0) = e + \varepsilon$. Si le calcul se poursuit sans autre erreur d'arrondi, la suite calculée n'est pas δ mais

$$u(n) = \delta(n) + \varepsilon n! \sim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon n!.$$

Ainsi, une erreur, aussi petite soit-elle, qui revient à placer un coefficient non nul devant une solution qui croît plus vite que celle que l'on veut calculer finit par l'emporter ! Et si les conditions initiales correspondant à la solution à calculer étaient représentables exactement, la moindre erreur d'arrondi au cours du calcul aurait un effet similaire.

En donnant un sens précis à la notion de conditionnement, on pourrait établir les résultats suivants.

(Pseudo-)proposition. Soit u une solution d'une récurrence linéaire inhomogène. Si la partie homogène admet une solution v telle que $u(n) = o(v(n))$ quand $n \rightarrow \infty$, le calcul $u(n)$ à partir de $u(0)$ est mal conditionné pour n grand.

(Pseudo-)proposition. Soit u une solution d'une récurrence linéaire homogène d'ordre au moins 2.

1. S'il existe une solution v telle que $u(n) = o(v(n))$ quand $n \rightarrow \infty$, alors le calcul de $(u(0), \dots, u(r-1)) \mapsto u(n)$ est mal conditionné pour n grand. En particulier, le calcul d'une solution minimale est mal conditionné.
2. Si, pour toute solution v , on a $v(n) = O(u(n))$ quand $n \rightarrow \infty$, le calcul est bien conditionné. En particulier, le calcul d'une solution dominante est bien conditionné.

2.3 Asymptotique des solutions d'une récurrence à coefficients variables

Nous avons pour l'instant vu des exemples à coefficients constants, où le calcul numérique par récurrence n'est pas forcément très intéressant dans la mesure où les solutions sont connues de manière très explicite. Les théorèmes suivants (admis) permettent de relier le comportement asymptotique des solutions d'une récurrence linéaire à coefficients variables à celui d'une ou plusieurs récurrences à coefficients constants « limites ».

Soit

$$a_r(n)u(n+r) + \cdots + a_1(n)u(n+1) + a_0(n)u(n) = 0 \quad (6)$$

une récurrence homogène avec $a_r(n) \neq 0$ pour tout n . Supposons que pour tout k ,

$$\frac{a_k(n)}{a_r(n)} \rightarrow b_k \in \mathbb{R}$$

avec $b_0 \neq 0$. Autrement dit, quand $n \rightarrow \infty$, la récurrence « ressemble » à la récurrence à coefficients constants

$$u(n+1) + b_{r-1}u(n+r-1) + \cdots + b_1u(n+1) + b_0u(n).$$

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ les racines du polynôme caractéristique de cette récurrence.

Théorème. (Poincaré, 1885) Supposons les α_i de modules deux à deux distincts. Alors toute solution u de (6) satisfait

$$\frac{u(n+1)}{u(n)} \rightarrow \alpha_i$$

pour un certain $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Théorème. (Perron, 1910) Si en outre $a_0(0) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une base de solutions (e_1, \dots, e_r) telle que

$$\frac{e_i(n+1)}{e_i(n)} \rightarrow \alpha_i, \quad n \rightarrow \infty$$

pour tout $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$.

Notons qu'il est possible de lever l'hypothèse sur les modules des α_i (la conclusion devient $|e_i(n+1)|^{1/n} \rightarrow |\alpha_i|$) et qu'il existe des résultats analogues dans le cas plus général $a_i(n) \sim b_i n^{d_i}$ (théorème de Perron-Kreuser). Par ailleurs, des résultats beaucoup plus précis (mais beaucoup plus difficiles) sont disponibles lorsque l'on connaît plus précisément le comportement asymptotique des coefficients.

3 Méthode de Miller

Le fait que les solutions dominante écrasent toutes les autres n'est pas toujours un inconvénient ! Par exemple, on a vu que si les racines de $P = X^r + a_{r-1}X^{r-1} + \cdots + a_0$ sont de modules deux à deux distincts, toute solution de la récurrence $u_{n+r} + a_{r-1}u_{n+r-1} + \cdots + a_0u_n = 0$ en dehors d'un sous-espace vectoriel strict vérifie $u_n \sim \lambda \alpha^n$, où α est la racine de module maximal. Un algorithme pour calculer (avec probabilité 1) cette racine consiste donc à tirer des conditions initiales u_0, \dots, u_{r-1} au hasard puis calculer u_n pour n grand.

Une version plus sophistiquée de la même idée conduit à la méthode de la puissance, employée en algèbre linéaire numérique pour trouver la valeur propre dominante d'une matrice et l'espace propre associé.

L'idée de l'algorithme de Miller est de procéder de manière similaire, mais en utilisant la récurrence à rebours, pour calculer non pas une solution dominante mais une solution minimale. (Intuition au moins partielle : « quand on va à reculons, les solutions minimales sont dominantes ».)

3.1 Récurrences inhomogènes d'ordre 1

Considérons le cas d'une récurrence inhomogène d'ordre 1,

$$u(n+1) + a(n)u(n) = b(n) \quad (7)$$

où l'on suppose $a(n) \neq 0$ pour tout n . Cette hypothèse permet d'écrire

$$u(n) = -\frac{1}{a(n)}u(n+1) + \frac{b(n)}{a(n)}.$$

Algorithme 1. Entrée : la récurrence, $N \in \mathbb{N}$.

$\tilde{u}_N := 0$

pour $i = N-1, N-2, \dots, 0$

$$\tilde{u}_i := \frac{1}{a(i)}(-\tilde{u}_{i+1} + b(i))$$

renvoyer $(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{N-1})$

Exemple. Reprenons encore l'exemple du début du cours.

$$v(n) = \frac{1}{n+1} v(n+1) - 1, \quad v(20) = 0.$$

Calculons à nouveau avec dix chiffres significatifs :

$$\begin{aligned} v(19) &= -1.000000000 \\ v(18) &= -1.052631579 \\ v(17) &= -1.058479532 \\ &\vdots \\ v(13) &= -1.076506626 \\ v(12) &= -1.082808202 \end{aligned}$$

On « gagne » des chiffres « justes » à peu près aussi vite que l'on en « perdait » dans la solution naïve... Et ce, sans avoir besoin nulle part de la condition initiale $\delta(0) = e!$

L'algorithme de Miller a ainsi deux intérêts distincts :

1. la récurrence à rebours est *bien conditionnée* pour le calcul d'une solution minimale, ce qui permet de s'affranchir du problème numérique observé précédemment ;
2. de façon peut-être encore plus importante, l'itération converge « automatiquement » vers la solution « minimale », ce qui permet de la calculer *sans connaître les conditions initiales correspondantes* — c'est la condition de minimalité à l'infini qui joue le rôle de condition initiale.

Rendons un peu plus précise la deuxième affirmation.

Théorème. Soit u une solution de (7) telle que $u(n) = o(w(n))$ pour une/toute solution non nulle w de la partie homogène. Notons $(u_0^{(N)}, \dots, u_{N-1}^{(N)})$ la suite finie renvoyée par l'algorithme 1 appelé avec le paramètre N , en arithmétique exacte (sans erreur d'arrondi). Pour tout $n \in \mathbb{N}$ **FIXÉ**, on a

$$u_n^{(N)} = u(n) + O\left(\frac{u(N)}{w(N)}\right)$$

quand $N \rightarrow \infty$.

Autrement dit, l'erreur absolue est en $u(N)/w(N)$, l'erreur relative en

$$\frac{1}{w(N)} \frac{u(N)}{u(n)}$$

et donc par exemple en $o(1/w(N))$ si $u(N) \rightarrow 0$.

Exemple. Dans notre exemple habituel,

$$u_n^{(N)} = \delta(n) \left(1 + O\left(\frac{1}{N!}\right) \right).$$

Démonstration. Posons $E^{(N)}(n) = u_n^{(N)} - u(n)$. Comme $u_n^{(N)}$ et $u(n)$ satisfont la même récurrence en n , on a

$$E^{(N)}(n) = -\frac{1}{a(n)} (u_{n+1}^{(N)} - u(n+1)) = -\frac{1}{a(n)} E^{(N)}(n+1),$$

autrement dit, $E^{(N)}(n)$ est solution de la récurrence homogène. Écrivons $E^{(N)}(n) = \lambda(N) w(n)$. La condition initiale

$$E^{(N)}(N) = u_N^{(N)} - u(N) = -u(N)$$

donne $\lambda(N) = -u(N)/w(N)$, d'où

$$E(n) = -\frac{u(N)}{w(N)} w(n)$$

et le résultat cherché. \square

En poussant un peu plus loin l'analyse, il n'est pas très dur de faire une analyse d'erreur complète, avec borne « à la Higham » sur les erreurs d'arrondi accumulées (voir TD/TME).

3.2 Récurrences homogènes d'ordre 2

Des idées semblables fonctionnent pour les récurrences d'ordre supérieur, avec ou sans second membre. Voyons ici un second cas important en pratique et facile à analyser. On considère maintenant une récurrence du second ordre

$$a_2(n) u(n+2) + a_1(n) u(n+1) + a_0(n) u(n) = 0 \quad (8)$$

avec $a_2(n) \neq 0$ et $a_0(n) \neq 0$ pour tout n . À nouveau, la condition $a_0(n) \neq 0$ est importante pour pouvoir « renverser » la récurrence.

Algorithme 2. Entrée : la récurrence, N , u_0

```

 $\tilde{t}_{N+1} := 0$ 
 $\tilde{t}_N := 1$ 
pour  $i = N-1, N-2, \dots, 0$ 
     $\tilde{t}_i := -\frac{1}{a_0(i)} (a_2(i) \tilde{t}_{i+1} + a_1(i) \tilde{t}_i)$ 
pour  $i = 0, 1, \dots, N-1$ 
     $\tilde{u}_i = \frac{u_0}{\tilde{t}_0} \tilde{t}_i$ 
renvoyer  $(\tilde{u}_0, \dots, \tilde{u}_{N-1})$ 

```

À nouveau, la minimalité remplace une condition initiale, mais il en faut tout de même une pour déterminer quelle solution on veut calculer parmi le sous-espace de dimension 1 de solutions minimales ! (Exemples : voir TME.)

Proposition. Soit u une solution minimale de la récurrence (8). Notons $u_n^{(N)} = \tilde{u}_n$ les quantités calculées par l'algorithme 2, appelé avec $u_0 = u(0)$. Pour n fixé, on a

$$u_n^{(N)} \rightarrow u(n), \quad N \rightarrow \infty.$$

Démonstration. Soit v une solution linéairement indépendante de u . Par définition d'une solution minimale, on a $u(n) = o(v(n))$. Comme la suite $u^{(N)}$ calculée est aussi solution de la récurrence, on peut la décomposer sur la base (u, v) : soient donc $\lambda^{(N)}, \mu^{(N)}$ tels que

$$u_n^{(N)} = \lambda^{(N)} u(n) + \mu^{(N)} v(n).$$

D'après l'énoncé de l'algorithme, on a

$$u_0^{(N)} = \frac{u(0)}{\tilde{t}_0} \tilde{t}_0 = u(0)$$

et

$$u_{N+1}^{(N)} = \frac{u(0)}{\tilde{t}_0} \tilde{t}_{N+1} = 0$$

d'où le système d'équations

$$\begin{aligned} \lambda^{(N)} u(0) + \mu^{(N)} v(0) &= u(0), \\ \lambda^{(N)} u(N) + \mu^{(N)} v(N) &= 0. \end{aligned}$$

On résout :

$$\lambda^{(N)} = \frac{u(0) v(N)}{u(0) v(N) - v(0) u(N)} = \frac{1}{1 - \frac{v(0) u(N)}{u(0) v(N)}} \rightarrow 1$$

quand $N \rightarrow \infty$,

$$\mu^{(N)} = \frac{-u(0) u(N)}{u(0) v(N) - v(0) u(N)} \sim -\frac{u(N)}{v(N)} \rightarrow 0.$$

Le résultat s'ensuit (n est fixé!). \square

3.3 Compléments (non traités en cours)

L'algorithme 2 est appelé *algorithme de Miller simplifié*. La simplification est de prendre en entrée u_0 . Dans l'algorithme de Miller général, on se donne une condition de normalisation

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} c_n u(n)$$

et la multiplication par u_0/\tilde{u}_0 est remplacée par une multiplication par S/\tilde{S} , où

$$\tilde{S} = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \tilde{u}_n.$$

L'analyse est plus compliquée mais, pour des normalisations raisonnables, la conclusion $u_n^{(N)} \rightarrow u(n)$ subsiste. La vitesse de convergence dépend à la fois du rapport des croissances des solutions et de la normalisation choisie.

Exercice. À partir sa preuve, estimer la vitesse de convergence de l'algorithme 2 lors du calcul d'une solution minimale d'une récurrence satisfaisant les hypothèses du théorème de Perron.

Exercice 1. (Fonctions de Bessel) On cherche à évaluer les fonctions de Bessel de première et deuxième espèce $J_n(x)$ et $Y_n(x)$ pour diverses valeurs de l'indice n . Pour tout $x \neq 0$ fixé, les suites $(J_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient toutes deux la relation de récurrence linéaire

$$x u_{n+1} - 2n u_n + x u_{n-1} = 0. \quad (1)$$

Quand $n \rightarrow \infty$ à x fixé, on a

$$J_n(x) \sim \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n, \quad Y_n(x) \sim -\frac{1}{\pi} (n-1)! \left(\frac{x}{2}\right)^{-n}. \quad (2)$$

On pourra utiliser librement les fonctions

```
#define _XOPEN_SOURCE
#include <math.h>
double j0 (double x); double j1 (double x);
double y0 (double x); double y1 (double x);
```

de la bibliothèque mathématique du système. Rappelons qu'un programme utilisant la bibliothèque mathématique doit être compilé avec l'option `-lm`.

1. Écrire une fonction `double bessel_rec (int n, double x, double u0, double u1);` qui calcule le terme u_n de la solution de (1), pour la valeur de x donnée en paramètre, correspondant aux conditions initiales u_0 et u_1 .
2. En déduire une fonction `double my_Y (int n, double x);` calculant $Y_n(x)$. Comparer les résultats donnés par votre implémentation avec les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} Y_0(1) &\approx 0.88256964215676957983 \cdot 10^{-1} \\ Y_1(1) &\approx -0.78121282130028871655 \\ Y_2(1) &\approx -1.6506826068162543911 \\ Y_5(1) &\approx -260.40586662581222072 \\ Y_{10}(1) &\approx -121618014.27868918929 \\ Y_{20}(1) &\approx -0.41139703148355052801 \cdot 10^{23} \end{aligned}$$

Combien de chiffres significatifs obtenez-vous pour les quatre derniers exemples ?

3. Même question dans le cas de J_n . On donne pour vérification :

$$\begin{aligned} J_0(1) &\approx 0.76519768655796655145 \\ J_1(1) &\approx 0.44005058574493351596 \\ J_2(1) &\approx 0.11490348493190048047 \\ J_5(1) &\approx 0.24975773021123443138 \cdot 10^{-3} \\ J_{10}(1) &\approx 0.26306151236874532070 \cdot 10^{-9} \\ J_{20}(1) &\approx 0.38735030085246577189 \cdot 10^{-24} \end{aligned}$$

4. Améliorer `my_J` à l'aide de la méthode de Miller. Expérimentalement, à quel indice faut-il initialiser la méthode pour calculer $J_n(1)$ avec une quinzaine de décimales correctes ?

Exercice 2. (Analyse d'erreur de l'algorithme de Miller) On considère la récurrence inhomogène du premier ordre

$$a_n x_{n+1} - x_n + b_n = 0 \quad (3)$$

où $(a_n), (b_n)$ sont deux suites réelles qui ne s'annulent pas. L'objet de cet exercice est d'étudier l'accumulation des erreurs d'arrondi lors de l'exécution de cet algorithme. On fixe une suite non nulle (w_n) vérifiant $a_n w_{n+1} = w_n$ pour tout n , et l'on suppose qu'il existe une solution (x_n) de (3) telle que $x_n/w_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. On note $(v_0, v_1, \dots, v_{N-1})$ la suite définie par la récurrence (3) appliquée dans le sens des indices décroissants à partir de la condition initiale $v_N = 0$ (c'est-à-dire le résultat de l'algorithme de Miller exécuté en arithmétique exacte).

1. On s'intéresse à l'exécution de l'algorithme lorsque a_n, b_n et v_n sont représentées par des approximations en virgule flottante, notées respectivement \hat{a}_n, \hat{b}_n et \hat{v}_n . On suppose que les opérations arithmétiques $+$ et \times satisfont au « modèle standard » de l'arithmétique flottante avec une plage d'exposants infinie, et que le calcul de \hat{a}_n ou \hat{b}_n en fonction de n fournit un arrondi fidèle de la valeur exacte. Justifier brièvement qu'il existe deux suites $(\eta_n), (\eta'_n)$ telles que pour $0 \leq n \leq N-1$,

$$\hat{v}_n = (1 + \eta_n) a_n \hat{v}_{n+1} + (1 + \eta'_n) b_n.$$

Borner η_n et η'_n en fonction de l'unité d'arrondi \mathbf{u} . On supposera $\mathbf{u} < 1/2$.

2. Soit $e_n = \hat{v}_n - v_n$. Montrer que l'on a pour $0 \leq n \leq N-1$

$$e_n = \sum_{i=n}^{N-1} \frac{w_n}{w_i} (\eta_i a_i v_{i+1} + \eta'_i b_i) \prod_{j=n}^{i-1} (1 + \eta_j).$$

Indication : on pourra montrer que $(e_n)_{0 \leq n < N}$ satisfait

$$e_n = (1 + \eta_n) a_n e_{n+1} + \eta_n a_n v_{n+1} + \eta'_n b_n.$$

3. En déduire que l'erreur relative entre v_n et \hat{v}_n est bornée par

$$4 \mathbf{u} (1 + \mathbf{u})^{3N} \left| \frac{w_n}{v_n} \right| \sum_{i=n}^{N-1} \frac{|v_i| + 2|b_i|}{|w_i|}.$$