Exercices, 5

Exercice 1 (exemples d'EMV). — Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance et étudier ses propriétés (lien avec un estimateur par moments, risque quadratique, loi limite et intervalle de confiance asymptotique) dans les cas suivants :

1. On observe $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. On observe $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, où $p \in [0, 1]$. Pour la loi limite et l'intervalle de confiance, on considérera l'hypothèse supplémentaire $p \in]0, 1[$.
3. On observe $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.

Exercice 2. — On considère l'expérience statistique

$$\mathcal{E} = (\{0, 1\}, \mathcal{P}(\{0, 1\}), (\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \{\frac{1}{10}, \frac{8}{10}\}}),$$

$$\text{où} \quad \mathbb{P}_\theta(dx) = \theta\delta_{\{0\}}(dx) + (1 - \theta)\delta_{\{1\}}(dx).$$

1. Montrer que le modèle est dominé, et calculer sa fonction de vraisemblance.
2. En déduire l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Exercice 3 (loi Gamma). — On rappelle que la loi Gamma $\Gamma(\alpha, \beta), \alpha, \beta > 0$ est une v.a. réelle de densité

$$x \mapsto \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x), \quad x > 0.$$

On se donne un échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ de loi $\Gamma(\alpha, \beta)$.

1. On suppose le paramètre β connu. Proposer un estimateur de α par la méthode des moments.
2. On suppose à présent que les deux paramètres α, β sont inconnus. Proposer un estimateur de (α, β) par la méthode des moments.
3. Toujours dans le cas où α, β sont inconnus, donner le système d'équation que satisfont les estimateurs de (α, β) par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 4. — Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de la loi uniforme sur $[-\theta, \theta]$, avec $\theta > 0$.

1. Décrire le modèle statistique associé.
2. Proposer un estimateur $\hat{\theta}_n$ de θ obtenu par méthode des moments. Est-il consistant? Proposer un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance α.
3. Soit T_n l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Montrer que pour tout réel t,

$$\mathbb{P}_\theta^n \left(n(T_n - \theta) \leq t \right) \to e^{t/\theta} \mathbb{1}_{t \leq 0} + \mathbb{1}_{t > 0}$$

quand n tend vers l'infini. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau α.

4. Comparer les estimateurs $\hat{\theta}_n$ et T_n sur la base des longueurs moyennes des intervalles de confiance asymptotiques associés.

Exercice 5. — Dans une urne contenant 1000 tickets, 20 sont marqués θ et 980 sont marqués 10θ, où θ est un réel strictement positif inconnu.

1. On tire un unique ticket de valeur X. Donner le modèle. Est-il dominé par une mesure σ-finie? Donner un estimateur qui s'apparenterait à un maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ (maximiser $P_\theta(\{X\})$). Montrer que $\mathbb{P}(\hat{\theta} = \theta) \geq 0,98$.

2. On renumérote les tickets marqués 10θ par $a_i\theta$, $1 \leq i \leq 980$, où les a_i sont des réels connus, deux-à-deux distincts, et compris dans l'intervalle $[10; 10,1]$. Donner le nouvel estimateur du maximum de vraisemblance $\widetilde{\theta}$ et montrer que $\mathbb{P}(\widetilde{\theta} < 10\theta) = 0,02$. Commenter.

Exercice 6 (Weibull). — Soit $c > 0$ un paramètre fixé connu. On considère la loi de Weibull $P_\lambda, \lambda > 0$, de densité

$$\lambda c x^{c-1} e^{-\lambda x^c} \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On observe un n-échantillon de la loi P_λ, avec $n \geq 3$.

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}_n$ de λ.

2. Calculer son risque quadratique $\mathbb{E}_\lambda^n \left[(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2\right]$ où P_λ^n désigne la loi du n-échantillon.

Exercice 7. — On considère pour $\mu > 0$, $\alpha > 0$, la loi de probabilité $\mathbb{P}_{\mu,\alpha}$ dont la fonction de répartition est continue sur $\mathbb{R}$ et vaut : $\mathbb{P}_{\mu,\alpha}(X \leq x) = 1 - Cx^{-\alpha}$ si $x \geq \mu$ et 0 sinon. On se donne un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ i.i.d de loi $\mathbb{P}_{\mu,\alpha}$.

1. Calculer la constante C.

2. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\mu}_n, \hat{\alpha}_n)$ de (μ, α).

3. Quelle est la loi limite de $n(\hat{\mu}_n - \mu)$?

4. Montrer que
$$\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}_n^{-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln(X_i/\mu)\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0,$$
puis en déduire la loi limite de $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n - \alpha)$.