Rappels

Manipulation de variables aléatoires

Exercice 1. — 1. Soit X variable aléatoire réelle, de fonction de répartition F_X et fonction caractéristique φ_X. Pour $a, b \in \mathbb{R}$ on note $Y = aX + b$.

- Montrer que $F_Y(t) = F_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$.
- Montrer que $\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi_X(at)$.
- Si X a densité f_X, montrer que f_Y a densité $\frac{1}{a} f_X\left(\frac{t-b}{a}\right)$.

2. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, montrer que $\varphi_{X+Y} = \varphi_X \varphi_Y$.

Variables aléatoires usuelles (À savoir par coeur ou redémontrer rapidement)

X notera la variable en question, F_X sa fonction de répartition, φ_X sa fonction caractéristique, f_X sa densité.

Discrètes:

- Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, $p \in [0, 1]$: $\mathbb{P}(X = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(X = 0)$.
  - $\varphi_X(t) = (1 - p) + pe^{it}$.
  - $\mathbb{E}(X) = p$, $\mathrm{Var}(X) = p(1 - p)$.
- Binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in [0, 1]$:

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

  - $\varphi_X(t) = ((1 - p) + pe^{it})^n$.
  - Si $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$ i.i.d. $\mathcal{B}(p)$, $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{B}(n, p)$.
  - $\mathbb{E}(X) = np$, $\mathrm{Var}(X) = np(1 - p)$.
- Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\forall k \geq 0 \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

  - $\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}$.
  - $\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda$.
  - Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$, $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.
- Géométrique $\mathcal{G}(p)$, $p \in [0, 1]$:

$$\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}(X = k) = p(1 - p)^{k-1}.$$

  - $\varphi_X(t) = \frac{pe^{it}}{1-(1-p)e^{it}}$.

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.
- Si $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ i.i.d. $\mathcal{B}(p)$, $\min\{i \mid X_i = 1\} \sim \mathcal{G}(p)$.

Continues:

- Uniforme $\mathcal{U}(]a,b[)$:
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{]a,b[}(t).$$
  - Si $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$, $a + (b-a)U \sim X$.
  - $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.
- Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$:
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t>0}.$$
  - Si $E \sim \mathcal{E}(1)$, $E/\lambda \sim X$.
  - $F_X(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{t>0}$.
  - $\varphi_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.
  - $\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$, $\mathrm{Var}(X) = 1/\lambda^2$.
- Gaussienne (ou Normale) $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\sigma > 0$:
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$
  - Si $N \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X \sim \mu + \sigma N$.
  - $\varphi_X(t) = e^{it\mu - \sigma^2 t^2/2}$.
  - $\mathbb{E}(X) = \mu$, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$.
- Laplace (ou Exponentielle bilatère) $\mathcal{L}(b)$, $b > 0$:
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \frac{2}{b} e^{-|t|/b}.$$
  - Si $L \sim \mathcal{L}(1)$, $bL \sim X$.
  - $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathrm{Var}(X) = 2b^2$.
  - $\varphi_X(t) = \frac{1}{1+t^2 b^2}$.
- Cauchy $\mathcal{C}(a)$:
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \frac{a}{a^2 + t^2}.$$
  - Si $C \sim \mathcal{C}(1)$, $aC \sim \mathcal{C}(a)$.
  - $\varphi_X(t) = e^{-a|t|}$.
  - $F_X(t) = 1/2 + \arctan(t/a)/\pi$.
  - Si $X \sim \mathcal{C}(a_1)$, $Y \sim \mathcal{C}(a_2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim \mathcal{C}(a_1 + a_2)$.
- Gamma $\mathcal{G}(a,b)$, $a, b > 0$:
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_X(t) = \frac{b^a t^{a-1} e^{-bt}}{\Gamma(a)} \mathbb{1}_{t>0}.$$
  - $\varphi_X(t) = \left(\frac{b}{b-it}\right)^a$.
  - $\mathbb{E}(X) = a/b$, $\mathrm{Var}(X) = a/b^2$.
  - Si $X \sim \mathcal{G}(a,b)$, $Y \sim \mathcal{G}(a',b)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $X + Y \sim \mathcal{G}(a + a', b)$.
  - Si $X \sim \mathcal{G}(a,b)$ et $\lambda > 0$, $\lambda X \sim \mathcal{G}(a, b/\lambda)$.