M1 2019/2020 Stats - TD6

Exo 1 | N°1 : Loi exp

1- Modèle $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \left(\mathcal{E}(\lambda)^{\otimes n}\right)_{\lambda>0}\right)$, dominé par $\mathcal{L}_n$.

2- Fonction de vraisemblance

$$V_{x_1,\dots,x_n}(\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda n \bar{x}} \prod_{i=1}^{n} 1_{x_i>0}.$$

Or, p.s., $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $X_i>0$, donc $L(\lambda) = \ln\left(V_{X_1,\dots,X_n}(\lambda)\right)$ est bien définie p.s., avec

$$L(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda n\bar{X}$$

On a $L'(\lambda)=0 \iff \lambda^{-1} = \bar{X} \iff \lambda = \frac{1}{\bar{X}}$.

D'où $\hat{\lambda}_{EMV} = \frac{1}{\bar{X}}$.

3- On a, comme $E_\lambda(X_1^2) = \frac{1}{\lambda^2} < +\infty$,

$$\sqrt{n}\left(\bar{X} - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow[\mathcal{L}]{n\to+\infty} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\right).$$

Or $u \mapsto \frac{1}{u}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$, de dérivée $-\frac{1}{u^2}$.

Donc

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}} - \lambda\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda^2}\times\left[\frac{1}{(\frac{1}{\lambda})^2}\right]^2\right)$$

$$\parallel$$

$$\mathcal{N}(0,\lambda^2).$$

4- Vrais. de H_1 : $\lambda_1^n e^{-\lambda_1 n\bar{X}} \prod_{i=1}^{n} 1_{X_i>0}$.

Vrais. de H_0 : $\lambda_0^n e^{-\lambda_0 n\bar{X}} \prod_{i=1}^{n} 1_{X_i>0}$

Rapport de vrais. : $RV(X_1,\dots,X_n) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n e^{-(\lambda_1-\lambda_0)n\bar{X}}$, p.s.,

donc $\searrow$ en $\bar{X}$.

On a alors $RV(X_1,\dots,X_n) \geq t \iff \bar{X} \leq q(t)$, p.s.

$\mathbb{P}_{H_0}(\bar{X} \leq q) = \alpha \iff \mathbb{P}_{H_0}(\Gamma(n,\lambda_0) \leq nq)$

$\iff \mathbb{P}(\Gamma(n,1) \leq nq\lambda_0)$

Si p est le quantile d'ordre α d'une $\Gamma(n,1)$, ~~ainsi~~ à $\mathbb{P}_{H_0}\left(\overline{X} \leq \frac{p}{n\lambda_0}\right) = \alpha$, donc $T = \mathbb{1}_{\overline{X} \leq \frac{p}{n\lambda_0}}$ est un test de niveau <u>exact</u> α. D'après NP, comme il est exact, il est UPP.

L'erreur de seconde espèce vaut $\mathbb{P}_{H_1}\left(\overline{X} > \frac{p}{n\lambda_0}\right)$

$$\cancel{= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\lambda_1}\Gamma(n,1) > \frac{p}{n\lambda_0}\right) = \mathbb{P}\left(\Gamma(n,1) > \frac{\lambda_1}{\lambda_0}p\right)}$$

~~Avec~~ $\cancel{\sqrt{n}(\Gamma(n,1) - 1) \xrightarrow[\mathcal{L}]{} \mathcal{N}(0,1)}$

<u>Lemme</u> : Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} X$, où X est à densité >0, alors les quantiles CV.

On a $\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma(n,1)}{n} - 1\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Donc $q_{\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma(n,1)}{n}-1\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Q_\alpha$.

Or $\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma(n,1)}{n}-1\right) \leq q_{\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma(n,1)}{n}-1\right)}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(\Gamma(n,1) \leq n + \sqrt{n}\, q_{\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma(n,1)}{n}-1\right)}\right)$$

Donc $p = n + \sqrt{n}\, q_{\sqrt{n}\left(\frac{\Gamma(n,1)}{n}-1\right)} = n + \sqrt{n}\,Q_\alpha + o(\sqrt{n})$.

$\mathbb{P}_{H_1}\left(\cancel{\Gamma(n,1)}\ \overline{X} > \frac{p}{n\lambda_0}\right) = \mathbb{P}_{H_1}\left(\overline{X} > \frac{1}{\lambda_0} + o(1)\right)$

Or $\overline{X} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda_1}$, donc $\mathbb{P}_{H_1}\left(\overline{X} > \frac{1}{\lambda_0} + o(1)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ex 2

<u>Test du χ^2</u> : $S = \sum_{j=1}^{6} \frac{(N_j - N_j^{\text{theo}})^2}{N_j^{\text{theo}}} \xrightarrow[H_0]{\mathcal{L}} \chi^2(5)$

$$= \frac{0}{10} + \frac{9}{10} + \frac{4}{10} + \frac{4}{10} + \frac{1}{10} + \frac{4}{10}$$

$$= 2{,}2.$$

Test $\mathbb{1}_{S \geq q_{97,5\%}}$. $q_{97,5\%} > 11{,}07$.

Donc on accepte H_0.

Exo 3

1- On a $X - X_E = \Pi_{E^\perp}(X)$, donc $(X - X_E) \perp\!\!\!\perp X_E$ (Cochran). Or $X_E - X_F$ est $\sigma(X_E)$-mesurable, donc

$\|X - X_E\|^2 \perp\!\!\!\perp \|X_E - X_F\|^2$.

Avec $\|X - X_E\|^2 = \chi^2(n-p)$.

On a $\cancel{X_E}$ $X_E - X_F \overset{(\text{loi})}{=} \Pi_{F^\perp}\mu + \mathcal{N}(0, \Pi_E \Pi_{F^\perp})$

Donc $\|(X_E - X_F) - \Pi_{F^\perp}\mu\|^2 \underset{(\text{Cochran})}{\overset{(\text{loi})}{=}} \chi^2(p-q)$.

(encore + simple $(\Pi_F X, \Pi_E - \Pi_F X, \Pi - \Pi_E X)$ $\vec{v_g}$
$\mathcal{N}((\Pi_F\mu, \Pi_E - \Pi_F\mu, 0), \sigma^2 I_n)$: Cochran.) Non

2- Sous H_0, $\|(X_E - X_F)\|^2 / p-q \overset{(\text{loi})}{=} \frac{\chi^2(p-q)}{p-q}$,

donc $T \overset{(\text{loi})}{=} \mathcal{F}(p-q, n-p)$.

3- $\mathbb{P}_{H_1}(T \leq c)$

$= \mathbb{P}_{H_1}\left(\|(X_E - X_F)\|^2 / p-q \leq \hat{\sigma}^2 c \right)$

$= \mathbb{P}\left(\|\mathcal{N}(\Pi_{F^\perp}\mu, \sigma^2 \Pi_E \Pi_{F^\perp})\|^2 \leq (p-q)\hat{\sigma}^2 c \right)$

$\underset{(\text{cours})}{=} \mathbb{P}\left(\sigma^2 \left(Z_1 + \|\Pi_{F^\perp}\mu\| \right)^2 + \sum_{i=2}^{p-q} Z_i^2 \right) \leq (p-q)\hat{\sigma}^2 c)$, avec

les Z_i $\perp\!\!\!\perp$, et $\perp\!\!\!\perp$ de $\hat{\sigma}^2$.

Vérifions que $\varphi(u) = \mathbb{P}((Z_1 + u)^2 \leq x)$ est $\downarrow$ en u.

Si $u_2 > u_1$, on a

$\mathbb{P}(|Z_1 + u_2| \leq \sqrt{x}) - \mathbb{P}(|Z_1 + u_1| \leq \sqrt{x})$

$= \underbrace{\Phi(\sqrt{x} - u_2) - \Phi(-u_2 - \sqrt{x})}$ $- \Phi(\sqrt{x} - u_1) - \Phi(-u_1 - \sqrt{x})$

$\varphi(u) = \Phi(-u + \sqrt{x}) - \Phi(-u - \sqrt{x})$

$\varphi'(u) = -f(-u + \sqrt{x}) + f(-u - \sqrt{x}) = f(u + \sqrt{x}) - f(\sqrt{x} - u) \leq 0$.

Donc $\mathbb{P}_{H_1}(T \leq c) \downarrow$ en $\|\mu - \mu_F\|^2$ $\square$

II

Exo 4

1- En posant $X=(x_{11},x_{12},\dots,x_{1n_1},x_{21},\dots,x_{2n_2},\dots,x_{q n_q})^t$,

et $E=\{u\in\mathbb{R}^n \mid \forall j\in[\![1,q]\!]\ u_{N_{j-1}+1}=u_{N_{j-1}+2}=\dots=u_{N_{j-1}+n_j}\}$,

où $N_p=\sum_{s=1}^{p} n_s$, $N_0=0$.

On a $\mu\in E$, et $\dim(E)=q$. De plus

$$X_E=(\underbrace{\bar{X}_{1\cdot},\dots,\bar{X}_{1\cdot}}_{n_1},\underbrace{\bar{X}_{2\cdot},\dots,\bar{X}_{2\cdot}}_{n_2},\dots,\underbrace{\bar{X}_{q\cdot},\dots,\bar{X}_{q\cdot}}_{n_q})^t$$

2- H_0 s'écrit $\mu\in\mathrm{vect}(\mathbb{1}_n)=F$. $X_F=\bar{X}_{\cdot\cdot}=\frac{1}{n}\sum_{i,j}x_{ij}$

3- Le test de Fisher s'écrit dans ce cas

$$\mathbb{1}_{T>c}\ ,\ \text{avec } T=\frac{\|X_E-X_F\|^2/q-1}{\|X-X_E\|^2/n-q},$$

où $\underset{H_0}{\overset{loi}{=}}\ \mathcal{F}(q-1,n-q)$.

Exo 5

1 $P_1(M_n\leq 1-t)=(1-t)^n$, si $\alpha>0$, $(1-t)^n=\alpha$

$\Leftrightarrow t=1-\alpha^{1/n}$. Donc $T=\mathbb{1}_{M_n\leq \alpha^{1/n}}$ est de niveau α.

2- Modèle $(\mathbb{R}^n,\mathcal{B}(\mathbb{R}^n),(\mathcal{U}(]0,\theta[)^{\otimes n})_{\theta\in]0,1]})$.

Dominé par $\mathcal{L}_n$.

<u>Vraisemblance sous H_1</u> : Pour $\theta<1$ $V_x(\theta)$

$=\frac{1}{\theta^n}\mathbb{1}_{\max(x_i)\leq\theta}$, donc $V_x(H_1)=\frac{1}{(M_n)^n}$ p.s.

<u>Vrais. sous H_0</u> : $V_{x_{1:n}}(H_0)=1$.

On en déduit $R(X)=\mathbb{1}_{M_n\leq u}$, où u est à calibrer. On en déduit $R=T_{1,1-}$.

3- Soit $\theta<1$. $P_\theta(T_{1,1-}=1)=P_\theta(M_n\leq \alpha^{1/n})$

$=P_0(\theta M_n\leq\alpha^{1/n})=\frac{\alpha}{\theta^n}\underset{\theta\to1}{\longrightarrow}\alpha$.

Donc $\inf_{\theta<1} P_\theta(T_{1,1-}=1)=\alpha$.

4- Pour $\theta > 1$, $V_X(\theta) = \frac{1}{\theta^n} 1_{M_n \leq \theta}$,

Donc $V_X(H_1) = \sup_{\theta > 1} V_X(\theta)$

$= \frac{1}{(M_n)^n} 1_{M_n > 1} + 1_{M_n \leq 1}$

$V_X(H_0) = 1_{M_n \leq 1}$

Donc $R_{H_0 \backslash H_1}(X) = 1_{M_n \leq 1} + \cancel{(M_n)^n} \, (+\infty) \, 1_{M_n > 1}$.

Donc le test du RV vaut $T_{1,1+} = 1_{M_n > 1}$ et est stupide.

Si $\theta > 1$, $P_\theta(\{M_n > 1\}) = 1 - P_\theta(\{M_n \leq 1\})$

$= 1 - \frac{1}{\theta^n} \xrightarrow[\theta \to 1]{} 0$.

Donc $\inf_{\theta \in H_1} P_\theta(T_{1,1+} = 1) = 0$!

5-1 On prend T de la forme $1_{M_n \geq t}$.

On a alors $P_1(M_n \geq t) = \alpha \Leftrightarrow 1 - t^n = \alpha$

$\Leftrightarrow t = (1-\alpha)^{1/n}$.

T est de niveau α. Pour $\theta > 1$,

$$\begin{cases} P_\theta(T_{1,1+} = 1) = 1 - \frac{1}{\theta^n} \\ P_\theta(T = 1) = P_\theta(M_n \geq t) > P_\theta(M_n > 1) = 1 - \frac{1}{\theta^n}. \end{cases}$$

De plus, $\inf_{\theta > 1} P_\theta(M_n \geq t) = \inf_{\theta > 1} \left(1 - \left(\frac{t}{\theta}\right)^n\right) = \alpha > 0$.

Exo6

1- On a $\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X^3} - 0 \\ \overline{X^4} - 3\sigma^4 \end{pmatrix} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$,

si $F = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Avec $\Sigma_{1,1} = Var(X_1^3) = E(X_1^6) = \sigma^6 \times 15$

$\Sigma_{2,2} = Var(X_1^4) = E(X_1^8) - (E(X_1^4))^2$

$= 7 \times 5 \times 3 - 3^2$

$= 3 \times 32 = 96\,\sigma^8$

$\Sigma_{1,2} = E(X_1^3(X_1^4 - \sigma^4 \times 3))$

$= 0$.

III

$\Delta = d^2_{Q,h,\mathcal{H}} = d^2_{P,h,\mathcal{H}}$

$\cancel{P\Delta \leq 2\times[2W_1(P,Q)\sup_{t\in\mathbb{R}^d}\|m(Q_{t,h})\|]}$

$\cancel{+\|d^2_{P,h}-d^2_{Q,h}\|_{\infty,K}}$

Donc $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{96} \end{pmatrix} \times \sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X^3} \\ \overline{X^4} - 3\sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{L}]{n\to+\infty} \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma^6 & 0 \\ 0 & \sigma^8 \end{pmatrix}\right)$,

ou encore, par Slutsky

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{15}\,(\hat{\sigma}^3) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{96}(\hat{\sigma}^4)} \end{pmatrix} \times \sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X^3} \\ \overline{X^4} - 3\sigma^2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathcal{L}]{n\to+\infty} \mathcal{N}(0, I_2).$$

Come $\|\ \|^2 \in C^0(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^+)$,

$$JB = \frac{n}{15}\left(T_n^{(3)}\right)^2 + \frac{n}{96}\left(T_n^{(4)}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(2).$$

2-) $T = 1_{JB \geq q}$, où q quantile d'ordre $1-\alpha$

d'1 $\chi^2(2)$ est un test de niveau α pour

$\begin{cases} H_0 : \text{"F est Gaussienne"} \\ H_1 : \text{"F pas Gaussienne"}. \end{cases}$

3- Test consistant $\iff$ puissance $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Non, pas consistance. Si on a

X_1 ; $E(X_1)=0$ $\quad E(X_1^3)=0 \quad E(X_1^5)=E(X_1^7)=0$

$E(X_1^2)=1 \quad E(X_1^4)=3 \quad E(X_1^6)=15,\ E(X_1^8)=105,$

On a aussi $\frac{n}{15}\left(T_n^{(3)}\right)^2 + \frac{n}{96}\left(T_n^{(4)}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \chi^2(2).$

Donc $P_X(1_{JB\geq q}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha \neq 1.$

~~?e d'une telle loi~~? $\to$ Cf TD proba.

$$\cancel{\Phi^{(t)} = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4 \times 3}{4!} - \frac{15t^6}{6!} + \frac{105t^8}{8!} + \frac{\dots(it)^2}{2\dots 2!}}$$

Exo 7

1-/ $\mathbb{P}(X_i = Y_i) = \int_{\mathbb{R}^2} F_{X_i}(dx) F_{Y_i}(dy) \mathbb{1}_{x=y}$

$= 0.$

Donc, si $X_i \overset{\mathcal{L}}{=} Y_i$, $\mathbb{P}(X_i > Y_i) = 1 - \mathbb{P}(X_i < Y_i)$

$\overset{ech}{\Leftrightarrow} = 1 - \mathbb{P}(Y_i < X_i)$

Donc $\mathbb{P}(X_i > Y_i) = \frac{1}{2}$.

2-/ $N \underset{H_0}{=} \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$.

3-/ Si q_β donne le β-quantile d'une

$\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$, $\mathbb{1}\{|N - \frac{n}{2}| \geq q_{1-\alpha/2} - n/2\}$ est

un test de niveau α.

Asymptotiquement, $c = \sqrt{n}\,\frac{q_{1-\frac{\alpha}{2}}^{\mathcal{N}(0,1)}}{2}$ marche aussi.

4-/ On a $N = 2$

$N - 6 = 4 > 3$. Donc le redoublement a une influence.

Exo 8

1- Modèle $(\{0,1\}^n, \mathcal{P}(\{0,1\}^n), (\mathcal{B}(\theta)^{\otimes n})_{\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}})$, dominé par comptage sur $\{0,1\}^n$.

On a $V_{X_{1:n}}(\theta_1) = \binom{n}{n\bar{x}} \theta_1^{n\bar{x}} (1-\theta_1)^{n(1-\bar{x})}$

Donc $R_{\theta_0|\theta_1}(X_{1:n}) = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{n\bar{x}} \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)^{n(1-\bar{x})}$

On a $R_{\theta_0|\theta_1} \neq 0$,

$\ln(R_{\theta_0|\theta_1}) \geq s \Leftrightarrow n\bar{X} \ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + n(1-\bar{x}) \ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right) \geq s$

$\Leftrightarrow n\bar{X} \underbrace{\ln\left(\frac{\theta_1(1-\theta_0)}{\theta_0(1-\theta_1)}\right)}_{>0} \geq s - n \ln\left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_0}\right)$

Donc TRV est de la forme $\mathbb{1}_{n\bar{x} > q}$;

IV

Avec $\begin{cases} P_{H_0}(n\bar{X} \geq q) \leq \alpha \\ P_{H_0}(n\bar{X} \geq q-1) > \alpha \end{cases}$; avec sous H_0, $n\bar{X} \sim \mathcal{B}(n, \theta_0)$.

2-) $V_{H_0} = \binom{n}{S} \theta_0^S (1-\theta_0)^{n-S}$ (avec $S = n\bar{X}$)

$V_{H_1} = \binom{n}{S} \theta_0^S (1-\theta_0)^{n-S}$ si $\frac{S}{n} \leq \theta_0$

$= \binom{n}{S} \left(\frac{S}{n}\right)^S \left(1-\frac{S}{n}\right)^{n-S}$ si $\frac{S}{n} > \theta_0$

Donne $R(X) = 1_{\frac{S}{n} \leq \theta_0} + \dfrac{\left(\frac{S}{n}\right)^S \left(1-\frac{S}{n}\right)^{n-S}}{\theta_0^S (1-\theta_0)^{n-S}} 1_{\frac{S}{n} > \theta_0}$

On pose $g(s) = s \log\left(\frac{s}{n\theta_0}\right) + (n-s)\log\left(\frac{1-s/n}{1-\theta_0}\right)$.

$g'(s) = \log\left(\frac{s}{n\theta_0}\right) + 1 - \log\left(\frac{1-s/n}{1-\theta_0}\right) + (n-s) \times \dfrac{-1/n}{1-s/n}$

$= \log\left(\underbrace{\dfrac{s/n(1-\theta_0)}{\theta_0(1-s/n)}}_{>1 \text{ quand } s/n > \theta_0}\right)$

Donc $\{R(X) \geq t\}$ est de la forme $S \geq q$. Comme H_0 ne bouge pas, $T_{RV}^{(2)} = T_{RV}^{(1)}$, obtenu à la Q 1.

Soit $\theta > \theta_0$. Comme $T_{RV}^{(2)} = T_{RV}^{(1)}$, si ϕ est un autre test de niveau α,

$$E_\theta(\phi) \leq E_\theta(T_{RV}^{(1)}) = E_\theta(T_{RV}^{(2)}).$$

3-) On a $V_{H_0} = \binom{n}{S} \theta_0^S (1-\theta_0)^{n-S}$ si $\frac{S}{n} > \theta_0$

$= \binom{n}{S} \left(\frac{S}{n}\right)^S \left(1-\frac{S}{n}\right)^{n-S}$ si $\frac{S}{n} \leq \theta_0$,

V_{H_1} comme en 2-,

$RV_3 = 1_{\frac{S}{n} \leq \theta_0} \left(\dfrac{\theta_0}{S/n}\right)^S \left(\dfrac{1-\theta_0}{1-S/n}\right)^{n-S}$ ↗ sur $\frac{S}{n} \leq \theta_0$ d'après 2-

$+ 1_{\frac{S}{n} > \theta_0} \underbrace{\left(\dfrac{S/n}{\theta_0}\right)^S \left(\dfrac{1-S/n}{1-\theta_0}\right)^{n-S}}_{}$ ↗ sur $\frac{S}{n} > \theta_0$ d'après 2

Donc $T_{RV,3} = T_{RV,1}$ est encore UPP d'après 1.

4-) <u>Lemme 6.1 du cours</u> : Si T' de niveau exactement α, et de m̂ puissance qu'un $RV(\alpha)$ entre θ_0 et θ_1, alors $T' 1_{RV \neq t_\alpha} = T 1_{RV \neq t_\alpha}$ (où $T = 1_{RV \geq t_\alpha}$).

Supposons que T soit un UPP pour $\Theta_0 = [\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon]$, $\Theta_1 = [0,1] \setminus \Theta_0$.

Si $\theta_1 > \theta_0$, T domine T_{θ_0,θ_1} donc T est de la forme $1_{S \geq q}$ (vu qu'il est pile poil de niveau α, on a m̂ $T = T_{\theta_0,\theta_1}$)

Inversement, si $\theta_1 < \theta_0$, T est de la forme $1_{S \leq q_+}$.
Donc $T = 1$ et $\alpha = 1$.

V