Stats Fonda 2019\2020, TD5

Exo 1

1- $\left(\{0,1\}, \mathcal{P}(\{0,1\}), (\mathcal{B}(\theta))_{\theta \in \{\underbrace{\frac{1}{10}}_{\theta_0}, \underbrace{\frac{8}{10}}_{\theta_1}\}}\right)$,

est dominé par $\delta_0 + \delta_1$. Fonction de vraisemblance

$$f_x(\theta) = \theta 1_{x=0} + (1-\theta) 1_{x=1}.$$

(Si on veut détailler : soit g mes ≥ 0,

$$\int_{\{0,1\}} g(x) P_\theta(dx) = g(0) \times \theta + g(1) \times (1-\theta)$$
$$= \int_{\{0,1\}} g(x) f_x(\theta) \, (\delta_0 + \delta_1)(dx) \Big)$$

2- $\hat{\theta}_{EMV}(x) = \theta_1 1_{x=0} + \theta_0 1_{x=1}$.

(si $x=0$, $f_x(\theta)$ max en $\theta = \theta_1$, si $x = 1$, $f_x(\theta)$ max en $\theta = \theta_0$).

~~3/4~~

Exo 2

1- On a $\mathbb{E}(\bar{X}_n) = \mathbb{E}(X) = \frac{\alpha}{\beta}$, donc $\beta \bar{X}_n$ est un estimateur de α par méthode des moments.

2- ~~Regardons~~ $\cancel{S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i^2}$. ~~On a~~

$$\cancel{\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1^2) = Var(X_1) + (\mathbb{E}(X_1))^2}$$
$$\cancel{= \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha^2}{\beta^2}}.$$

~~On cherche T_1 (estimateur de α) et T_2 (estimateur de β)~~

Mise sous la forme modèle exponentiel (dominé par λ^n)

$$P_{\alpha,\beta}(x_{1:n}) = \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{\alpha-1} e^{-\beta \sum_{i=1}^n x_i}$$
$$= \left(\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right)^n \exp\left((\alpha-1)\left(\sum_{i=1}^n \ln(x_i)\right) - \beta \sum_{i=1}^n x_i \right)$$

$$= \exp\left(\left\langle \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{matrix} \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) \\ -n\bar{x} \end{matrix} \right\rangle - n \ln\left(\frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^{\alpha}} \right) \right)$$

Reparamétrisation : $a = \alpha - 1$
$b = \beta$

$$p_{a,b}(x) = \exp\left(\left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}}_{\theta}, \underbrace{\begin{matrix} n\overline{\ln(x)} \\ -n\bar{x} \end{matrix}}_{T(x)} \right\rangle \underbrace{- n \ln\left(\frac{\Gamma(a+1)}{\beta^{a+1}} \right)}_{\log(Z(\theta))} \right).$$

$\rightarrow$ forme canonique

<u>Méthode des moments</u> : On a $\nabla_\theta \log(Z) = E_\theta(T(x))$

<u>Principe</u> : Résoudre en θ $\nabla_\theta \log(Z) = T(X)$.

<u>Ici</u> : $\log(Z(\theta)) = n \ln(\Gamma(a+1)) - (a+1) n \ln(b)$

$$\nabla_{(a,b)} \log(Z(\theta)) = \begin{pmatrix} n \frac{\Gamma'(a+1)}{\Gamma(a+1)} - n\ln(b) \\ -n \frac{(a+1)}{b} \end{pmatrix}$$

La méthode des moments donne donc

$$\begin{pmatrix} \psi(a+1) - \ln(b) = \overline{\ln(x)} \\ \frac{a+1}{b} = \bar{x} \end{pmatrix}, \text{ avec } \psi(u) = \frac{\Gamma'(u)}{\Gamma(u)}.$$

<u>2-1</u> <u>Méthode des moments "standard"</u>

On regarde $\bar{X}_n$, et $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i^2$. (ceux dont on veut faire coller les espérances)

$$\begin{cases} \mathbb{E}_{(\alpha,\beta)}(\bar{X}_n) = \frac{\alpha}{\beta} \\ \mathbb{E}_{(\alpha,\beta)}(S_n) = E(X_1)^2 + \frac{1}{\cancel{n}} Var(X_1) = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\cancel{n}\beta^2}. \end{cases}$$

On résout alors $\begin{cases} \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \bar{X}_n \\ \frac{1}{\hat{\beta}^2}(\hat{\alpha}(\hat{\alpha}+1)) = S_n \end{cases}$,

soit $\begin{cases} \frac{(\bar{X}_n)^2}{(\hat{\alpha})^2}(\hat{\alpha}(\hat{\alpha}+1)) = S_n \\ \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \bar{X}_n \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{\hat{\alpha}} = S_n / (\bar{X}_n)^2 \\ \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = \bar{X}_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{\alpha} = \frac{(\bar{X}_n)^2}{S_n - (\bar{X}_n)^2} \\ \hat{\beta} = \frac{\bar{X}_n}{S_n - (\bar{X}_n)^2} \end{cases}$$

Exo3

1-) $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \left(\mathcal{U}([-\theta,\theta])^{\otimes n}\right)_{\theta>0}\right)$.

2-) $E_\theta(\bar{X}_n) = 0$. $\hat{m}_2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$.

$$E_\theta(\hat{m}_2) = E_\theta(X_1^2) = \frac{1}{2\theta}\int_{-\theta}^{\theta} u^2\,du$$

$$= \frac{1}{\theta}\left[\frac{\theta^3}{3}\right] = \theta^2/3.$$

On prend donc $\hat{\theta}_n = \sqrt{3\hat{m}_2}$.

Les X_i^2 sont iid, $E(X_1^4) < +\infty$, le TCL donne

$$E(X_1^4) = \frac{1}{\theta}\left[\frac{\theta^5}{5}\right] = \frac{\theta^4}{5}. \quad Var(X_1^2) = E(X_1^4) - E(X_1^2)^2 = \frac{\theta^4}{5} - \frac{\theta^4}{9} = 4\theta^4/45$$

alors $\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - \theta^2/3\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{4\theta^4}{45}\right)$.

La Δ-méthode donne alors

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n 3X_i^2} - \sqrt{\theta^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{9\theta^4 \times 4}{45} \times (\sqrt{\ })'(\theta^2)^2\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(0, \frac{4 \times 9\theta^4}{45 \times (4\theta^2)}\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{5}\right).$$

On a aussi (loi des grands nombres), $\hat{\theta}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{p.s.} \theta$.

On a $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \theta/\sqrt{5}\,\mathcal{N}(0,1)$.

$\hat{\theta}_n \xrightarrow{P} \theta$, donc (Slutsky)

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta)}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Si q est le quantile d'ordre $1-\frac{\alpha}{2}$ d'une $\mathcal{N}(0,1)$, avec proba α on a

$$-q \leq \frac{\sqrt{n}\sqrt{5}}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2}}(\hat{\theta}_n - \theta) \leq q$$

$$\Leftrightarrow \quad -q \leq \sqrt{5}\sqrt{n}\left(1 - \frac{\theta}{\hat{\theta}_n}\right) \leq q$$

$$\Leftrightarrow \quad \hat{\theta}_n\left(1 - \frac{q}{\sqrt{5n}}\right) \leq \theta \leq \hat{\theta}_n\left(1 + \frac{q}{\sqrt{5n}}\right) \quad \text{o}$$

B- Modèle dominé par λ_n.

Vraisemblance $\quad V_{x_{1:n}}(\theta) = \frac{1}{(2\theta)^n}\prod_{i=1}^{n} 1_{|x_i| \leq \theta}$

$$= \frac{1}{(2\theta)^n} 1_{M_n \leq \theta}, \text{ où}$$

$$M_n = \max_{i=1..n} |X_i|.$$

Donc $T_n = M_n$.

On a, pour ~~$t \leq 0$~~ $t \in \mathbb{R}$,

~~$P_\theta(M_n \leq t) = 0.$~~

$$P_\theta(n(T_n - \theta) \leq t)$$

$$= P_\theta\left(M_n \leq \theta + \tfrac{t}{n}\right) = 1_{t>0} + P_\theta\left(\forall i\ X_i \in \left[-\theta + \tfrac{|t|}{n}, \theta - \ldots\right.\right.$$

$1_{t \leq 0}$

$$= 1_{t>0} + \frac{1}{(2\theta)^n} \times \left(2\theta - \frac{2|t|}{n}\right)^n 1_{t\leq 0}$$

$$= 1_{t>0} + \left(1 - \frac{|t|}{n\theta}\right)^n 1_{t \leq 0}$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 1_{t>0} + e^{t/\theta} 1_{t\leq 0}.$$

On en déduit $n(\theta - T_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(1/\theta) = \theta\mathcal{E}(1)$

(car $P_\theta(n(\theta - T_n) \geq t) = P_\theta(n(T_n - \theta) \leq -t)$

$$= 1_{t<0} + e^{-t/\theta} 1_{t\geq 0}).$$

$$IC_A(\alpha) = \left[T_n, \frac{T_n}{1 - \frac{a_{95\%}}{n}}\right].$$

~~3-) $\mathbb{P}_\theta(M_n \leq \theta - t)$~~ $(t>0)$

$$\cancel{= \left(\frac{1}{2\theta}\right)^n 2^n(\theta-t)^n = \left(1-\frac{t}{\theta}\right)^n}$$

4-) $L(I_1) = 2\hat{\theta}_n \sqrt{\frac{1}{5n}}\, q$

$\mathbb{E}(L(I_1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\mathbb{E}(L(I_2)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Donc T_n risque d'être meilleur.

Exo4)

1-) Modèle $(\mathbb{N}^n, \mathcal{P}(\mathbb{N}^n), (\mathcal{P}(\theta)^{\otimes n})_{\theta \geq 0})$. Dominé par comptage sur $\mathbb{N}^n$, log-vraisemblance

$$\ell_{x_{1:n}}(\theta) = \left(-n\theta + n\bar{x}\log(\theta) - \sum_{i=1}^n \log(x_i!)\right)1_{\theta>0}$$

~~$+ 1_{\theta=0}$~~

EMV : $\hat{\theta}_n = \bar{X}_n$; le même que par les moments.

Risque quadratique : $\mathrm{Var}_\theta(\bar{X}_n) = \frac{1}{n} \times \theta = \frac{\theta}{n}$

$(\mathrm{Var}(\mathcal{P}(\lambda)) = \lambda)$

$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \theta) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, \theta)$, i.e. ~~$\sqrt{n}\left(\frac{\bar{X}_n}{\sqrt{\theta}} - \sqrt{\theta}\right) \to \mathcal{N}(0,1)$~~

ICA : Slutsky ou Δ-méth.

Slutsky : $\sqrt{n}\left(\sqrt{\bar{X}_n} - \frac{\theta}{\sqrt{\bar{X}_n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$

ICA : $\left[\bar{X}_n \pm \sqrt{\frac{\bar{X}_n}{n}}\, q\right]$.

2-) $(\llbracket 0,n \rrbracket, \mathcal{P}(\llbracket 0,n \rrbracket), (\mathcal{B}(n,p))_{p\in[0,1]})$. Dominé par comptage.

Vraisemblance

$$V_x(p) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

EMV : ~~$x(1-p)$~~ $p = x/n$ si $x \neq 0$ ou n

si $x = 0$, $p = 0$

si $x = n$, $p = 1$

$\Rightarrow \hat{p}_n = \frac{X}{n}$.

III

C'est aussi l'estimateur par moments.

Risque quad : $\frac{p(1-p)}{n}$.

Pour $p \in]0,1[$, TCL, $\sqrt{n}\left(\frac{X}{n} - p\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0, p(1-p))$

Slutsky : $\dfrac{\sqrt{n}\left(\frac{X}{n} - p\right)}{\sqrt{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathcal{N}(0,1)$

ICA : $\left[\frac{X}{n} \pm \frac{\sqrt{\frac{X}{n}\left(1-\frac{X}{n}\right)}}{n} q\right]$.

3.| Modèle : $\left(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathcal{N}(\mu,\sigma^2))^{\otimes n}_{\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0}\right)$.

Dominé par λ_n.

log V : $-\frac{n}{2}\log(2\pi) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\|x_i - \mu\|^2}{2\sigma^2} - n\log(\sigma)$

$= F_{x_{1:n}}(\mu, \sigma)$.

$\to \hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma}^2$ vérifie $\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - \bar{x}\|^2\right) \times$

$-2\sigma^{-3} - \frac{n}{\sigma} = 0$, c-à-d

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|x_i - \bar{x}\|^2$.

Pour les moments : $\hat{\mu} = \bar{X}$, et $E_{\mu,\sigma^2}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2\right) = \sigma^2 + \mu^2$,

donc $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \hat{\mu}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\|X_i - \bar{X}\|^2$). Donc ce

sont les mû.

ICA sur μ : $\left[\bar{X}_n \pm \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} q\right]$ (Rq, il est

mû exact pour les quantiles d'une loi $\mathcal{T}(n-1)$, avec

$\hat{\sigma}'^2 = \frac{n}{n-1}\hat{\sigma}^2$)

ICA sur σ^2 : $E(X^4) < +\infty$, TCL,

~~$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}^2 \frac{n-1}{n}\right.$~~

$\sqrt{n}\left(\hat{\sigma}^2 + \|\mu - \bar{x}\|^2 - \sigma^2\right) \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0, 3\sigma^4)$.

Or $\sqrt{n}(\mu - \bar{x})^2 = \frac{\left[\sqrt{n}(\mu - \bar{x})\right]^2}{\sqrt{n}} \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}, \mathbb{P}}{\longrightarrow}} 0$, donc

$\dfrac{\sqrt{n}(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2)}{\sqrt{3}\hat{\sigma}^2} \underset{n \to +\infty}{\overset{\mathcal{L}}{\longrightarrow}} \mathcal{N}(0,1)$ (Slutsky)

ICA : $\left[\hat{\sigma}^2 \pm \frac{\sqrt{3}\hat{\sigma}^2}{\sqrt{n}} q\right]$.

4-| Modèle $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathcal{U}(]0,\theta[)^{\otimes n})_{\theta>0})$. Dominé par λ_n. Vraisemblance

$$V_{x_{1:n}}(\theta) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{M_n \leq \theta}, \quad \text{où } M_n = \max(x_1, \dots, x_n).$$

EMV : $\hat{\theta}_n = M_n$.

Moments : $\tilde{\theta}_n = 2\bar{X}_n \neq \hat{\theta}_n$.

Risque quadratique : $E_\theta((\theta - M_n)^2) = \int_0^{+\infty} P_\theta((\theta - M_n)^2 \geq u)\,du$

Avec $P_\theta((\theta-M_n)^2 \geq u) = P(M_n \leq \theta - \sqrt{u})$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\theta}\right)^n$$

$$E_\theta((\theta - M_n)^2) = \int_0^{\theta^2} \left(1 - \frac{\sqrt{u}}{\theta}\right)^n du$$

$v = \frac{\sqrt{u}}{\theta}$, $dv = \frac{1}{2\theta\sqrt{u}}\,du = \frac{1}{2\theta} \times \frac{1}{v\theta} = \frac{1}{2\theta^2 v}\,du$

$du = 2\theta^2 v\,dv$

$$= \int_0^1 (1-v)^n\, 2v\,\theta^2\,dv$$

$$= 2\theta^2\, B(n+1, 2)$$

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Ex 5|

$$X = \theta$$

1- $(\mathbb{R}^{+*}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{+*}), \{P_\theta = 0.98\,\delta_{10\times\theta} + 0.02\,\delta_\theta\}_{\theta>0})$

Modèle non dominé : si μ dominait P_θ, pour tout $\theta>0$, on aurait $\forall u>0$ $\mu(\{u\})>0$. Et donc, $\mu(]0,1[)$

$= \sum_{u \in]0,1[} \mu(\{u\}) = +\infty$.

$\hat{\theta} = \frac{X}{10}$ s'apparenterait à un EMV. En effet,

$$P_\theta(\{X\}) = 0.02\,\mathbb{1}_{X=\theta} + 0.98\,\mathbb{1}_{X=10\theta}.$$

Donc $\underset{\theta>0}{\arg\max}\ P_\theta(\{X\}) = \frac{X}{10} = \hat{\theta}$.

On a $P_\theta(\hat{\theta} = \theta) = P_\theta(X = 10\theta) = 0.98$.

2-| On a $P_\theta = 0.02\,\delta_\theta + \sum_{j=1}^{980} \delta_{a_j\theta} \times \frac{1}{1000}$.

Alors $P_\theta(\{X\}) = 0.02\,\mathbb{1}_{\theta = X} + \sum_{j=1}^{980} \frac{1}{1000}\,\mathbb{1}_{a_j\theta = X}$.

$\underset{\theta>0}{\arg\max}\ P_\theta(\{X\}) = X = \hat{\theta}$

IV

On a alors $\mathbb{P}(X < 100\theta) = 0.02 = \mathbb{P}(X=\theta)$. Donc

$\mathbb{P}_\theta(\tilde{\theta} \geq 100\theta) = 0.98$. L'EMV est vraiment pas bon.

3- $\cancel{E_\theta(X) = 0.02\,\theta + \frac{\sum_{j=1}^{980} a_j \theta}{1000}}$

$$\cancel{\hat{\theta}_M = \frac{X}{0.02 + \sum_{j=1}^{980} a_j / 1000}}$$

Exo 6

1- Modèle $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), (\mathbb{P}_\lambda^{\otimes n})_{\lambda>0})$, dominé

par $\lambda^{\otimes n}$.

Vraisemblance :

$$V_{x_{1:n}}(\lambda) = \lambda^n c^n \left(\prod_{i=1}^n x_i\right)^{c-1} e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i^c} \prod_{i=1}^n \mathbb{1}_{x_i > 0}.$$

log V :

$$\mathcal{F}_{x_{1:n}}(\theta) = -\infty \mathbb{1}_{\exists i | x_i \leq 0} + n\log(\lambda) + n\log(c) + (c-1)\, n\overline{\log(x)} - \lambda \sum_{i=1}^n x_i^c$$

On a $x_1, \dots, x_n > 0$ p.s. Pour $x_1, \dots, x_n > 0$,

$$\frac{\partial}{\partial\theta} \mathcal{F}_{x_{1:n}}(\theta) = \frac{n}{\lambda} - n\overline{x^c}$$

Donc $\tilde{\theta}_{EMV} = \frac{1}{\overline{X^c}}$.

2- $E_\lambda^n[(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2]$

$$= \int_0^{+\infty} (\lambda c)^n \prod_{i=1}^n x_i^{c-1} e^{-\lambda x_i^c} \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i^c} - \lambda\right)^2 dx_i$$

$u_i = x_i^c$ (difféo $(\mathbb{R}^+)^n, (\mathbb{R}^+)^n$).

$$|J_\varphi|_{x_{1:n}} = \left(\prod_{i=1}^n x_i^{c-1}\right) c^n$$

$$= \int_0^{+\infty} du_1 \dots du_n\, \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n u_i} \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n u_i} - \lambda\right)^2.$$

$$= \mathbb{E}\left(\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^n Y_i} - \lambda\right)^2\right), \text{ où } Y_i \text{ iid } \mathcal{E}(\lambda).$$

1. Modèle $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}), (\mathbb{P}_{\mu,\alpha})_{\mu,\alpha>0}^{\otimes n})$, dominé par Lebesgue λ^n.

log Vrais (sur $X_i > \mu$, ce qui arrive p.s.)

$$F_{(\mu,\alpha)}(X_1, \dots, X_n)$$

$$= n\log(C\alpha) + \sum_{i=1}^{n} \log(X_i^{-(\alpha+1)})$$

$$= n\log(C\alpha) - (\alpha+1)n\,\overline{\log(X)}$$

EMV? $\quad = n\log(\alpha) + n\alpha\log(\mu) - n(\alpha+1)\overline{\log(X)}$

Vraisemblance $\qquad C = \mu^\alpha$.

$$V_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\alpha) = \prod_{i=1}^{n} (C\alpha)\, X_i^{-(\alpha+1)} \mathbb{1}_{X_i \geq \mu}$$

$$= \mathbb{1}_{m_n \geq \mu} (C\alpha)^n e^{-(\alpha+1)n\,\overline{\log(X)}}$$

$$= \mathbb{1}_{m_n \geq \mu} (\alpha\mu^\alpha)^n e^{-(\alpha+1)n\,\overline{\log(X)}}, \text{ avec}$$

$$m_n = \min_{i=1..n} X_i.$$

$\forall \alpha \quad V_{x_1,\dots,x_n}(\mu,\alpha) \leq V_{x_1,\dots,x_n}(m_n,\alpha)$,

donc $\hat{\mu}_n = m_n$.

On a alors

$$V_{X_{1:n}}(m_n,\alpha) = (\alpha m_n^\alpha)^n e^{-(\alpha+1)n\,\overline{\log(X)}}$$

$$= \alpha^n e^{-(\alpha+1)n\,\overline{\log(X)} + n\alpha\log(m_n)}$$

$$\cancel{\frac{\partial}{\partial\alpha} V_{X_{1:n}}(m_n,\alpha) = n\left[m_n^\alpha + \alpha^2 m_n^{\alpha-1}\right](\alpha m_n^\alpha)^{n-1} e^{-(\alpha+1)n\,\overline{\log(X)}}}$$

$$\cancel{- n\,\overline{\log(X)}\,(\alpha m_n^\alpha)^n e^{-(\alpha+1)n\,\overline{\log(X)}}}$$

$$\cancel{= 0 \Leftrightarrow n\,\overline{\log(X)}\,(\alpha m_n^\alpha) = n\left[m_n^\alpha + \alpha^2 m_n^{\alpha-1}\right]}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow \alpha\,\overline{\log(X)} = 1 + \frac{\alpha^2}{m_n}}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} V_{x_{1:n}}(m_n,\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$n\alpha^{n-1} = (+n\,\overline{\log(X)} - n\log(m_n))\,\alpha^n \quad \cancel{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = (\overline{\log(X)} - \log(m_n))^{-1}. \text{ Donc } \hat{\alpha}_n = \left(\overline{\log(X)} - \log(m_n)\right)^{-1}$$

$$= \dots$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \Gamma(n, \lambda)$, et alors

$$\cancel{E_\lambda[(\hat{\lambda}_n - \lambda)^2] = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t} \left(\frac{1}{t} - \lambda\right)^2 \times \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \, dt}$$

On en déduit $\sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i}{n} = \Gamma(n, \lambda n)$.

Donc $E_\lambda((\hat{\lambda}_n - \lambda)^2) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-\lambda t n} \left(\frac{1}{t} - \lambda\right)^2 \times \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)} \, dt$

$$= \int_0^{+\infty} t^{n-3} e^{-\lambda t n} \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)} dt - 2\lambda \int_0^{+\infty} t^{n-2} e^{-\lambda t n} \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)}$$

$$+ \lambda^2$$

$$= \frac{\Gamma(n-2)}{(n\lambda)^{n-2}} \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)} - 2\lambda \frac{\Gamma(n-1)}{(\lambda n)^{n-1}} \frac{(\lambda n)^n}{\Gamma(n)} + \lambda^2$$

$$= \frac{(\lambda n)^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{2\lambda \times (n\lambda)}{(n-1)} + \lambda^2$$

$$= \lambda^2 \left[\frac{n^2 - 2n(n-2) + (n-1)(n-2)}{(n-1)(n-2)} \right]$$

$$= \lambda^2 \left[\frac{4n - 3n + 2}{(n-1)(n-2)} \right] = \lambda^2 \frac{n+2}{(n-1)(n-2)}.$$

Ex 7

1-) On a $P(X > x) = 1_{x<\mu} + Cx^{-\alpha} 1_{x \geq \mu}$

Densité : $+ C\alpha x^{-\alpha-1} 1_{x \geq \mu}$.

On doit avoir $C\alpha \int_\mu^{+\infty} x^{-(\alpha+1)} dx = 1$

$$\Leftrightarrow \alpha C \left[\frac{x^{-\alpha}}{-\alpha} \right]_\mu^{+\infty} = 1$$

$$\Leftrightarrow C = \mu^{\alpha}.$$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} = -\log(m_n) + \overline{\log(X)}$.

$\Leftrightarrow \alpha = \left(\overline{\log(X)} - \log(m_n)\right)^{-1}$.

3-) On a $\mathbb{P}\left(\hat{\mu}_n - \mu > \frac{t}{n}\right) =$

$$\mathbb{P}\left(\forall i \in [\![1,n]\!]\ X_i > \mu + \tfrac{t}{n}\right) = \left(\frac{\mu^\alpha}{(\mu+\frac{t}{n})^\alpha}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{1+\frac{t}{\mu n}}\right)^{\alpha n} = \exp\left(-\alpha n \log\left(1+\tfrac{t}{\mu n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{\alpha t}{\mu}}.$$

Donc $n(\hat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow[\mathcal{L}]{n\to+\infty} \mathcal{E}\left(\frac{\alpha}{\mu}\right)$.

4-) On a $\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}_n^{-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i}{\mu}\right)\right)$

$= \sqrt{n}\left(-\log(m_n) + \log(\mu)\right)$

$= \sqrt{n}\left(\log(\mu) - \log(\hat{\mu}_n)\right)$

On a $\sqrt{n}\left(\log(\mu) - \log(\hat{\mu}_n)\right)$

$$= \sqrt{n}\Big(\underbrace{\frac{\log(\mu)-\log(\hat{\mu}_n)}{\mu - \hat{\mu}_n}}_{\downarrow \mathbb{P}\ \frac{1}{\mu}} \times \mu - \hat{\mu}_n\Big), \text{ et } \sqrt{n}(\mu - \hat{\mu}_n) \xrightarrow[\mathbb{P}]{n\to+\infty} 0.$$

Donc $\sqrt{n}\left(\hat{\alpha}_n^{-1} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{X_i}{\mu}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathbb{P}} 0$.

Les $\log(X_i)$ sont i.i.d. $E\left(\log\left(\frac{X_1}{\mu}\right)\right) = \int_\mu^{+\infty} \frac{\alpha\mu^\alpha}{t^{\alpha+1}} \log\left(\frac{t}{\mu}\right) dt$

$$= \left[\alpha\mu^\alpha \frac{t^{-\alpha}}{-\alpha} \log\left(\frac{t}{\mu}\right)\right]_\mu^{+\infty} + \int_\mu^{+\infty} \frac{\alpha\mu^\alpha}{\alpha t^\alpha} \times \frac{1}{t}\, dt$$

$$= \mu^\alpha \int_\mu^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}\, dt = \mu^\alpha \left[\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_\mu^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\alpha}.$$

$$E\left(\log\left(\frac{X_1}{\mu}\right)^2\right) = \int_\mu^{+\infty} \frac{\alpha\mu^2}{t^{\alpha+1}} \log^2\left(\frac{t}{\mu}\right) dt$$

$$= \left[-\mu^\alpha t^{-\alpha} \log^2\left(\frac{t}{\mu}\right)\right]_\mu^{+\infty} + \int_\mu^{+\infty} \frac{\mu^\alpha}{t^\alpha} \times \frac{2\log\left(\frac{t}{\mu}\right)}{t}$$

VI

$$= \mu^{\alpha} \times 2 \int_{\mu}^{+\infty} \frac{\log(t/\mu)}{t^{\alpha+1}}\, dt = \frac{2}{\alpha}\, \mathbb{E}\left(\log\left(\frac{X_1}{\mu}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\alpha^2}.$$

Donc $\mathrm{Var}\left(\log\left(\frac{X}{\mu}\right)\right) = \frac{2}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha^2}$.

On en déduit $\sqrt{n}\left(\overline{\log(X/\mu)} - \frac{1}{\alpha}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\alpha^2}\right)$

~~et $\log(m_n) = \overline{\log(X)} - \frac{1}{\alpha}$~~

~~On a $\hat{\alpha}_n = \left(\overline{\log(X)} - \log(m_n)\right)^{-1}$~~

~~$$= \left(\frac{1}{\overline{\log(X/\mu)} + \log(\mu) - \log(m_n)}\right)$$~~

On a alors

$$\sqrt{n}\left(\underbrace{\hat{\alpha}_n^{-1}}_{a_n} - \underbrace{\alpha^{-1}}_{a}\right) \xrightarrow[\substack{(\text{Slutsky})\\ n\to+\infty}]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

Donc $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n - \alpha) = \sqrt{n}\left(\underbrace{\frac{a_n^{-1} - a^{-1}}{a_n - a}}_{\substack{\downarrow \mathbb{P} \\ n\to+\infty \\ (1/\cdot)'_a}} \times a_n - a\right)$

~~Avec~~

Slutsky encore

$$\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n - \alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \left(-\frac{1}{\alpha^2}\right) \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\alpha^2}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \alpha^2).$$