PSSD, Feuille 2

Exo 1

1. $X \sim \mathcal{B}(3/4)$.

2. $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{5} \{X_i = 0\}\right) \overset{\perp}{=} \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X_i = 0) = \left(\frac{1}{4}\right)^5$.

3. $S_7 := \sum_{i=1}^{7} X_i$. $\mathbb{P}(S_7 = 5) = \binom{7}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^5\left(\frac{1}{4}\right)^2$
$\sim \mathcal{B}(7, 3/4)$
$= \frac{21 \times 3^5}{4^7} \simeq 31{,}1\%$.

4. $\mathbb{P}\left(\{X_1 = 0\} \cap \{X_7 = 0\} \cap \left(\bigcap_{j=2}^{6} \{X_j = 1\}\right)\right)$
$\overset{\perp}{=} \frac{3^5}{4^7} \simeq 1{,}5\%$.

5. N à valeurs dans $[\![1, +\infty[\![$.
Soit $k \geq 1$. $\mathbb{P}(N = k) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} \{X_j = 0\} \cap \{X_k = 1\}\right)$
$= \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\left(\frac{3}{4}\right)$.

On a $N \sim \mathcal{G}(3/4)$.

Exo 2

Modèle : $X_1, \dots, X_{12}$ iid $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. (pile $\leftrightarrow$ '1').
$S := \sum_{i=1}^{12} X_i$.

1. $\mathbb{P}(S = 6) = \binom{12}{6} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12}$
$= \frac{11 \times 2 \times 3 \times 2 \times 7}{2^{12}} = \frac{11 \times 3 \times 7}{2^{10}} = \frac{231}{2^{10}}$.

2. $\mathbb{P}(S \geq 2) = 1 - \mathbb{P}(S = 0) - \mathbb{P}(S = 1)$
$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{12} - 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{12} = 1 - \frac{13}{2^{12}}$.

Exo 3

1. (M1) $\mathbb{E}(Y) = \int_1^3 \frac{1}{2} \times y \, dy = \frac{1}{4}\left[y^2\right]_1^3 = 2$.
$\mathbb{E}(Y^2) = \frac{1}{2}\int_1^3 y^2 \, dy = \frac{1}{6}\left[y^3\right]_1^3 = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$.
$\mathrm{Var}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \frac{13}{3} - 4 = \frac{1}{3}$

(M2) $Y \overset{(\text{loi})}{=} 1 + 2X$, où $X \sim \mathcal{U}([0,1])$. On sait que $\begin{cases} \mathbb{E}(X) = \frac{1}{2} \\ \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{12} \end{cases}$.
(loi classique)

- $\mathbb{E}(Y) = 1 + 2\mathbb{E}(X) = 2$
- $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(2X) = 4\,\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{3}$.

Exo 4

1- On a $\begin{cases} \oplus\ f_X \geq 0 \\ \oplus\ \int_{\mathbb{R}} f_X(u)du = \int_0^2 \frac{3x^2}{8}dx = \frac{1}{8}[x^3]_0^2 = 1 \end{cases}$

Donc f_X est bien une densité sur $\mathbb{R}$.

2- $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 \frac{3u^3}{8}du = \frac{3}{32}[u^4]_0^2 = \frac{3}{2}$

$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 \frac{3u^4}{8}du = \frac{3}{40}[u^5]_0^2 = \frac{3\times 32}{40} = \frac{12}{5}$

$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{12}{5} - \frac{9}{4} = \frac{48-40}{20} = \frac{2}{5}$.

Exo 5

Modèle : $X_{i,j} = 1$ si accident sur réacteur i année j.

$\mathbb{P}(X_{ij}=1) = p = 3\times 10^{-4}$.

Déduct° des auteurs : $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{59}\sum_{j=1}^{30} X_{ij} \geq 1\right) = 58\times 30 \times p$?

$$= \sum_{i=1}^{58}\sum_{j=1}^{30} \mathbb{P}(X_{ij}=1)$$

Méthode sérieuse :

On a toujours $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{59}\sum_{j=1}^{30} X_{ij} \geq 1\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i,j}\{X_{ij}=1\}\right)$

$\leq \sum_{i,j} \mathbb{P}(X_{ij}=1)$.

Si on suppose les X_{ij} iid, on a plutôt

$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{58}\sum_{j=1}^{30} X_{ij} \geq 1\right) = 1-(1-p)^{(58\times 30)} \simeq 0{,}4$.

Pour l'europe, $\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{143}\sum_{j=1}^{30} X_{ij} \geq 1\right) \simeq 72{,}3\%$. Le 129% est absurde.

Rq : Pour avoir $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$, il faut $\mathbb{P}(A\cap B) = 0 \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ ici.

Donc les H^ses qui rendraient le calcul des auteurs vrai sont loins de la situation d'indépendance (il faudrait par exemple supposer que si un réacteur a un pb l'année j, alors il n'aura pas de pb les autres années, et ses collègues n'auront pas de pb !, 2ème terme du crible de Poincaré).

II

Exo 6

1-) On note p la proport° de gens qui répondent 1 parmi les 60 millions.

On a alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

2-) X_i la réponse du i-ème sondé, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$

$S = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ nombre de personnes qui répondent 1.

Modèle raisonnable : $S \sim \mathcal{B}(1000, p)$

3-) Cela revient à supposer les X_i iid $\sim \mathcal{B}(p)$, ce qui correspond à des tirages indépendants et avec remise.

Pour le premier point, il s'agit de tirer au hasard dans la population

Pour le 2ème point, soit on autorise la remise, soit on sonde peu de personnes $\neq$ (comme $1000 < 60 \times 10^6$, avec remise $\simeq$ sans remise).

Rq : Si modèle sans remise, $S \sim \mathcal{H}(1000, 10^6, p)$ (hypergéométrique)

Exo 7

1-) On utilise l'encadrement

$$\frac{\varphi(x)}{x}\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \leq \mathbb{P}(N \geq x) \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \wedge \frac{\varphi(x)}{x}, \text{ pour } x \geq 1,$$

$$\text{et } \varphi(x) = \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Par symétrie, $\mathbb{P}(X > -1) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -1)$

$= 1 - \mathbb{P}(X \geq 1)$

$\leq 1 - \frac{\varphi(1)}{1}(1-1)$ [$= 0$]

$\left(\geq 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0,39\right.$ (peu pertinent, $\frac{1}{2}$ marche aussi).)

$\geq 1 - \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

Avec $\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0,24$.

Plus juste : $\mathbb{P}(X > -1) \geq 1 - \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0,76$

Et $\mathbb{P}(X > -1) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \simeq 0,9$

$\mathbb{P}(X > -1) = \frac{1}{2} + \mathbb{P}(X \in [0,1])$, $\mathbb{P}(X \in [0,1]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$\geq \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$

$\gtrsim 0,24$.

$\leq 1/\sqrt{2\pi}$

$\gtrsim 0,74$.

III

⊙ $\mathbb{P}(X<-2) = \mathbb{P}(X>2) \leq \dfrac{e^{-2}}{2\sqrt{2\pi}} \simeq 2{,}7\%.$

$$\mathbb{P}(X<-2) = \mathbb{P}(X>2) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}(X\in[0,2]) = \frac{1}{2} - \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx$$

$$\geq \frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} = -0{,}29.$$

Autre manière : $\mathbb{P}(X>2) \geq \dfrac{\varphi(2)}{2} \times \dfrac{3}{4} \simeq \dfrac{3}{4} \times 2{,}7\% \simeq 2\%.$

⊙ $\mathbb{P}(1<X<2) = \mathbb{P}(-1>X>-2)$

$$= \mathbb{P}(X>-2) - \mathbb{P}(X \geq -1)$$

$$\leq (1-2\%) - \underset{76\%}{\cancel{80\%}} \simeq \cancel{8\%}\ 22\%.$$

$$\geq (1-2{,}7\%) - 90\% \simeq 7{,}3\%.$$

⊙ $\mathbb{P}(|X|<2) = 1 - 2\mathbb{P}(X<-2)$

$$\leq 1 - 4\% = 96\%$$

$$\geq 1 - 5{,}4\% = 94{,}6\%.$$

Moralité : Moins de 5% de la masse en dehors de $[-2\sigma, 2\sigma]$.

2-) $Z \sim 1{,}75 + 0{,}1 \times X$

$$\mathbb{P}(Z>1{,}9) = \mathbb{P}(1{,}75 + 0{,}1X > 1{,}9)$$

$$= \mathbb{P}(0{,}1X > 0{,}15) = \mathbb{P}(X > 1{,}5)$$

$$\leq \frac{e^{-(1.5)^2/2}}{\sqrt{2\pi}\,1.5} \simeq 8{,}6\%.$$

$$\geq 8{,}6\% \times \left(1 - \frac{1}{(3/2)^2}\right) = 8{,}6\% \times \frac{5}{9} \simeq 4{,}7\%.$$

Ex 8) $X \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2) = m+\sigma N$, $N \sim \mathcal{N}(0,1)$.

⊙ $\mathbb{P}(X \leq 1{,}86) = 84\%$

$$= \mathbb{P}(m+\sigma N \leq 1{,}86) = \mathbb{P}\left(N \leq \frac{1{,}86-m}{\sigma}\right) = F\left(\frac{1{,}86-m}{\sigma}\right)$$

⊙ $\mathbb{P}(X \geq 1{,}58) = 97\%$

$$= \mathbb{P}(m+\sigma N \geq 1{,}58) = \mathbb{P}\left(N \geq \frac{1{,}58-m}{\sigma}\right) = 1 - F\left(\frac{1{,}58-m}{\sigma}\right)$$

Donc $F\left(\dfrac{1{,}58-m}{\sigma}\right) = 3\%.$

On a les équations

$$\begin{cases} F\left(\frac{1{,}86-m}{\sigma}\right) = 84\% \\ F\left(\frac{1{,}58-m}{\sigma}\right) = 3\% \end{cases}$$

où F est la fct de répartition d'une $\mathcal{N}(0,1)$.

En notant q_1 et q_2 les quantiles d'ordre 84% et 3% d'une loi $\mathcal{N}(0,1)$ (connus), on a alors

$$\begin{cases} \frac{1{,}86-m}{\sigma} = q_1 \\ \frac{1{,}58-m}{\sigma} = q_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{0{,}28}{\sigma} = q_1 - q_2 \\ m = 1{,}86 - \sigma q_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sigma = \frac{0{,}28}{q_1 - q_2} \quad (q_2 < 0) \\ m = 1{,}86 - \sigma q_1 \end{cases}.$$

Exo 9 Comme dans le 8.

$$\begin{cases} F\left(\frac{0{,}82-m}{\sigma}\right) = 20\% \\ F\left(\frac{0{,}98-m}{\sigma}\right) = 70\% \end{cases}$$

q_1 et q_2 quantiles d'ordre 20% et 70% d'une $\mathcal{N}(0,1)$ $(q_1 < 0, q_2 > 0)$,

$$\iff \begin{cases} \frac{0{,}16}{\sigma} = q_2 - q_1 \\ m = 0{,}82 - \sigma q_1 \end{cases}.$$

Exo 10 Note $X \sim \mathcal{N}(171{,}5\,,\,25) \sim \mu + \sigma N$, $\mu = 171{,}5$, $\sigma = 5$.

Seuil t :

$$\mathbb{P}(X \leq t) = p = \frac{379}{500}.$$

$$\mathbb{P}\left(N \leq \frac{t-\mu}{\sigma}\right).$$ Si q est le quantile d'ordre p d'une $\mathcal{N}(0,1)$,

$$\frac{t-\mu}{\sigma} = q \iff t = \mu + \sigma q.$$

Ici $p \simeq 75{,}8\%$, $q \simeq 0{,}7$, $t \simeq 175$.