

# INTRODUCTION AU DOMAINE DE RECHERCHE

---

## Laminations aléatoires du disque

---

Igor Kortchemski<sup>1</sup>

*École Normale Supérieure, Paris, France*

Octobre 2010

### Résumé

Nous étudions des sous-ensembles compacts aléatoires du disque unité obtenus en traçant de façon aléatoire une infinité de cordes. Nous présentons trois différentes manières de tracer ces cordes, ce qui mène à trois familles de compacts aléatoires différentes. Pour chacune d'elle, nous expliquons pourquoi le modèle discret, ensemble des cordes tracées avant l'instant  $n$ , converge vers le modèle continu et étudions le compact aléatoire obtenu à la limite en calculant sa dimension de Hausdorff. Chacun des modèles révèle des liens surprenants avec d'autres objets probabilistes : le premier avec la théorie des fragmentations, et les deux autres avec les arbres de Galton-Watson, l'excursion brownienne ainsi que l'excursion d'un processus de Lévy stable.

Ce texte se veut être compréhensible par des non-spécialistes ayant des bases en théorie des probabilités (un niveau M1 suffit en principe).

---

<sup>1</sup>igor.kortchemski@ens.fr

# 1 Introduction

Nous nous intéressons à des triangulations de parties du plan et plus particulièrement à des triangulations du disque. La notion de triangulation discrète d'un polygone est assez répandue ; il s'agit de la donnée de certaines de ses diagonales qui ne se coupent pas entre elles et telles que les régions délimitées à l'intérieur du polygone soient toutes des triangles. Ces triangulations ont intéressé les combinatoriciens, qui ont par exemple compté le nombre de triangulations d'un polygone régulier à nombre de côtés fixé. On pourrait essayer d'étendre cette définition à des polygones possédant un nombre infini de côtés, voire à des ensembles plus généraux. Une possibilité est donnée par la définition suivante.

**Définition 1.1.** Notons  $D$  le disque unité fermé de centre 0 et de rayon 1. Une *triangulation* de  $D$  est un sous-ensemble compact de  $D$  tel que, dans  $D$ , le complémentaire de ce sous-ensemble soit constitué d'une union disjointe de triangles ouverts dont les sommets appartiennent au cercle unité (voir figure 2 pour un exemple).

Il est clair que pour construire une triangulation du disque avec des segments, il en faut une infinité. Ainsi, d'un point de vue combinatoire, ou « discret », cet objet n'a pas vraiment de sens. On parle donc d'objet continu. D'un point de vue probabiliste, nous allons étudier les triangulations *aléatoires* et nous nous posons les questions suivantes, la première étant du ressort du monde discret, la deuxième du monde continu et enfin la troisième jetant un pont entre les deux :

- À quoi ressemble une grande triangulation discrète aléatoire typique ?
- Existe-t-il des triangulations continues aléatoires du disque intéressantes ?
- Peut-on construire des triangulations aléatoires du disque comme limites de triangulations aléatoires discrètes ?

Plus généralement, le troisième point touche à la question de l'existence des limites d'échelle de certains grands modèles discrets aléatoires. De telles convergences sont intéressantes de plusieurs points de vue. D'une part, certaines propriétés des modèles discrets passeront à la limite et nous fourniront des informations sur le modèle limite. D'autre part, l'étude du modèle continu limite permet parfois de nous renseigner sur les propriétés asymptotiques des modèles discrets. Enfin, il arrive que des modèles discrets différents aient la même limite d'échelle. Ce sera d'ailleurs le cas pour un de nos modèles. Ce phénomène appelé « universalité » est fondamental dans la compréhension de ces modèles.

De nombreuses avancées récentes en théorie des probabilités s'inscrivent dans cette philosophie. Par exemple, l'invention des processus SLE par Schramm [7] a permis de calculer divers exposants critiques de percolation (par Lawler, Schramm, Werner) ainsi que de calculer la dimension de Hausdorff de la frontière d'un mouvement brownien plan (par Lawler, Schramm, Werner).

Ce texte est organisé comme suit. La première partie, fondée sur un article récent d'il y a quelques mois [2], construit une triangulation aléatoire du disque à partir d'ensembles discrets construits de manière récursive (mais qui ne sont pas des triangulations). La seconde partie, fondée sur un article d'il y a une quinzaine d'années [1], construit une triangulation aléatoire du disque comme limite de grandes triangulations aléatoires discrètes (en un sens à préciser, bien entendu). Finalement, nous présentons des travaux en cours en nous demandant s'il est possible de construire des sous-ensembles aléatoires du disque en s'autorisant à avoir davantage de côtés.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Triangulations aléatoires récursives et <math>\frac{\sqrt{17}-1}{2}</math></b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Triangulations aléatoires uniformes du disque et <math>\frac{3}{2}</math></b>	<b>4</b>
3.1	Cadre d'étude . . . . .	4
3.2	Construction de la triangulation continue uniforme . . . . .	5
3.3	Convergence vers la triangulation continue uniforme . . . . .	6
3.4	Dimension de Hausdorff . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Laminations aléatoires du disque et <math>2 - \frac{1}{\alpha}</math></b>	<b>9</b>

## 2 Triangulations aléatoires récursives et $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$

Nous présentons une manière d'obtenir une triangulation aléatoire du disque grâce à des ensembles étoffés de manière récursive, décrite dans un article récent [2]. Plus précisément, nous allons ajouter une à une des cordes de manière aléatoire pour trouver, à la limite, une triangulation aléatoire du disque.

Nous nous contentons de citer quelques résultats sans rentrer dans les détails, préférant présenter plus longuement la triangulation aléatoire uniforme dans la partie suivante.

**Définition 2.1.** Considérons une suite  $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots$  de variables aléatoires, indépendantes et de loi uniforme sur le cercle unité. On définit alors une suite de compacts  $L_1, L_2, \dots$ , chacun étant constitué par une réunion finie de segments comme suit :  $L_1$  est le segment  $[U_1V_1]$ , et, pour  $n \geq 1$ , de deux choses l'une : si  $[U_{n+1}V_{n+1}]$  n'intersecte pas  $L_n$ , on pose  $L_{n+1} = L_n \cup [U_{n+1}V_{n+1}]$ , sinon, on pose  $L_{n+1} = L_n$ . Posons finalement :

$$L_\infty = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} L_n},$$

qui est un sous-ensemble compact aléatoire (car il dépend de la réalisation des variables aléatoires  $(U_i, V_i)_i$ ) ; voir la figure 1 pour un exemple.

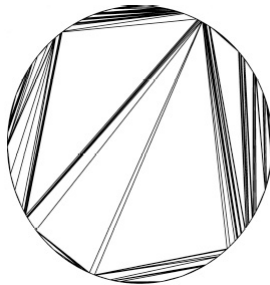


FIG. 1 – Un exemple du compact aléatoire  $L_\infty$ , tiré de l'article [2].

Le résultat principal est alors le suivant.

**Théorème 2.2** (Curien-Le Gall). *Presque sûrement, le compact aléatoire  $L_\infty$  est une triangulation du disque.*

Insistons sur le fait qu'a priori, aucun  $L_n$  n'est une triangulation. Ce n'est donc pas du tout clair qu'à la limite une triangulation surgisse. L'article précédemment mentionné calcule aussi la dimension de Hausdorff de cet ensemble.

**Définition 2.3.** Soit  $A$  un sous-ensemble<sup>2</sup> de  $\mathbb{R}^2$ . Sa *dimension de Hausdorff*<sup>3</sup> est le plus petit réel positif<sup>4</sup>  $s$  tel qu'il existe une mesure de Radon  $\mu$ , non nulle et à support compact inclus dans  $A$  telle que  $\mu(B(x, r)) \leq r^s$  pour tous  $x \in \mathbb{R}^2$  et  $r > 0$  (où  $B(x, r)$  désigne la boule euclidienne fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$ ).

Ainsi, intuitivement, la mesure d'Hausdorff nous renseigne en quelque sorte sur la « densité » d'un ensemble dans les boules euclidiennes : plus sa mesure est grande, plus il occupe de place dans ces boules. On peut par exemple montrer que la dimension de Hausdorff d'un segment vaut 1 et que celle du plan tout entier vaut 2.

**Théorème 2.4** (Curien, Le Gall). *Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de  $L_\infty$  vaut  $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$ .*

Pour démontrer les deux théorèmes précédents, l'utilisation de la théorie des fragmentations est cruciale. Expliquons ce dont il s'agit sans rentrer dans les détails. Chaque compact  $L_n$ , construit à la définition 2.1 comme union de cordes, découpe le disque en plusieurs parties connexes. En supposant que  $L_{n+1}$  soit construit à partir de  $L_n$  en ajoutant une corde, il est clair que cette corde a davantage de chances de tomber dans une grande partie connexe que dans une petite partie connexe (on dit que la taille d'une partie connexe  $Z$  est le périmètre des arcs de cercles appartenant à  $Z$ ). La théorie des fragmentations permet justement de décrire quantitativement ce genre de phénomène et explique en particulier la provenance du réel  $\frac{\sqrt{17}-1}{2}$  comme racine d'une équation du second degré caractérisant le modèle. Nous renvoyons le lecteur intrigué à l'article [2] pour les détails.

<sup>2</sup>borélien, mais nous ne ferons fi des problèmes de mesurabilité dans la suite.

<sup>3</sup>Nous utilisons une définition qui diffère de la définition usuelle afin d'insister sur l'intuition sous-jacente.

<sup>4</sup>Pour être tout à fait exact, il faudrait dire : la borne inférieure des réels positifs  $s$ .

### 3 Triangulations aléatoires uniformes du disque et $\frac{3}{2}$

Dans la partie précédente, nous avons construit une triangulation aléatoire continue du disque en ajoutant des cordes de manière récursive. Nous partons ici d'une autre idée directrice pour construire un tel objet. Plus précisément, nous utilisons un polygone régulier possédant un très grand nombre de côtés (qui « ressemble » donc au cercle) et disons qu'une *triangulation uniforme du disque* est une triangulation qui « ressemble » à une triangulation aléatoire uniforme de ce polygone. Écrit tel quel, cela ne veut pas dire grand chose ; dans ce qui suit, nous œuvrons à expliquer ce que nous entendons par là.

#### 3.1 Cadre d'étude

**Définition 3.1.** Pour un entier  $n \geq 3$ , notons  $P_n$  le polygone régulier du plan à  $n$  côtés centré en 0 et dont  $(1, 0)$  est un sommet. On note  $\mathbb{T}_n$  l'ensemble des triangulations de  $P_n$  qui sont, par définition, des compacts du plan obtenus en rajoutant à  $P_n$  des diagonales de sorte que les deux conditions suivantes soient vérifiées :

1. deux diagonales différentes ne peuvent se couper qu'en leurs extrémités,
2. toutes les faces sont des triangles (voir figure 2).

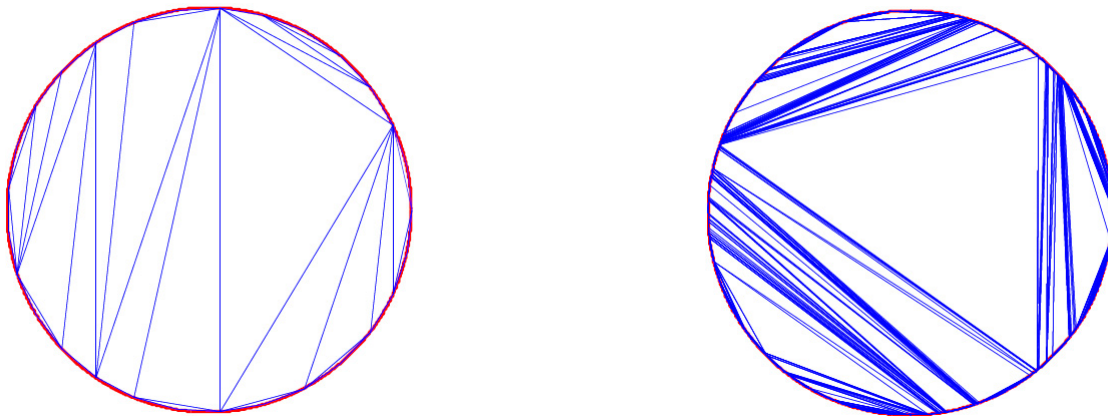


FIG. 2 – Deux triangulations de respectivement  $P_{29}$  et  $P_{2728}$

**Remarque 3.2.** Avant de poursuivre, rappelons que l'ensemble  $\mathbb{T}_n$  est fini, de cardinal  $C_{n-2}$  où  $C_n = \binom{2n}{n}/(n+1)$  est le  $n$ -ième nombre de Catalan.

Nous formalisons maintenant l'idée qu'une triangulation uniforme aléatoire de  $P_n$  est proche d'une triangulation continue uniforme du disque grâce à la notion de convergence en loi, que nous commençons par rappeler.

**Définition 3.3.** Soient  $(E, d)$  un espace métrique et  $X, (X_i)_{i \geq 0}$  des variables aléatoires à valeurs dans  $(E, d)$ . On dit que la suite de variables aléatoires  $(X_i)$  converge en loi vers  $X$  (sous-entendu dans  $(E, d)$ ) si pour toute fonction continue bornée  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  on a :

$$\mathbb{E}[f(X_n)] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[f(X)].$$

**Remarque 3.4.** Ainsi, intuitivement, en regardant une telle fonction  $f$  comme une sonde,  $f(X_n)$  décrivant une caractéristique de l'objet  $X_n$ , on peut dire que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$  si les propriétés de  $X$  ressemblent, en moyenne, à celles de  $X_n$  pour  $n$  grand. Avec la motivation donnée précédemment, on comprend donc pourquoi la convergence en loi est bien adaptée à ce qu'on désire faire.

Afin d'utiliser ce qui précède, il est donc nécessaire de choisir un espace métrique sympathique dans lequel nos triangulations uniformes vont vivre et converger.

**Définition 3.5.** Notons  $\mathcal{C}$  l'ensemble des sous-ensembles compacts du disque unité fermé  $D$ . Pour un sous-ensemble  $U$  du plan et  $r \geq 0$ , on note  $U_r = \{x \in \mathbb{R}^2; d(x, U) \leq r\}$  son  $r$ -voisinage fermé ( $d$  désigne la distance euclidienne usuelle). Munissons alors  $\mathcal{C}$  d'une distance dite de Hausdorff comme suit. Pour des compacts  $K, K' \in \mathcal{C}$ , on note :

$$d_H(K, K') = \inf\{r \geq 0; K' \subset K_r \text{ et } K \subset K'_r\}.$$

On vérifie aisément que  $(\mathcal{C}, d_H)$  est un espace métrique.

Dans la suite, nous voyons une triangulation de  $P_n$  comme un élément de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 3.6.** On note  $\mathfrak{t}_n$  une triangulation uniforme de  $\mathbb{T}_n$ . En d'autres mots,  $\mathfrak{t}_n$  est une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{C}$  telle que pour deux éléments  $t, t' \in \mathbb{T}_n$  on a  $\mathbb{P}[\mathfrak{t}_n = t] = \mathbb{P}[\mathfrak{t}_n = t']$ . Notons que ceci a bien un sens car  $\mathbb{T}_n$  est un ensemble fini.

Ainsi, il s'agit de déterminer s'il existe une variable aléatoire  $\mathfrak{t}$  à valeurs dans  $\mathcal{C}$  telle que la suite de variables aléatoires  $(\mathfrak{t}_n)$  converge en loi vers  $\mathfrak{t}$  dans l'espace métrique  $(\mathcal{C}, d_H)$ .

### 3.2 Construction de la triangulation continue uniforme

Les théorèmes suivants, dûs à Aldous [1], permettent de décrire la structure d'une grande triangulation uniforme (voir aussi la figure 2).

**Théorème 3.7** (Aldous). *Soit  $\mathfrak{t}_n$  une triangulation uniforme de  $\mathbb{T}_n$ . Alors il existe un compact aléatoire  $\mathfrak{t}$  du disque unité  $D$ , autrement dit une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathcal{C}$ , telle qu'on ait :*

$$\mathfrak{t}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{(d)} \mathfrak{t},$$

où la convergence a lieu en loi dans l'espace métrique  $(\mathcal{C}, d_H)$ . De plus, presque sûrement,  $\mathfrak{t}$  est une triangulation du disque (voir définition 1.1).

Par ailleurs, il est remarquable qu'on puisse explicitement décrire  $\mathfrak{t}$  par le truchement du mouvement brownien et plus particulièrement de l'excursion brownienne, que nous commençons par introduire.

**Définition 3.8.** Considérons  $(B_t)_{t \geq 0}$  un mouvement brownien réel standard. Notons  $g_1 = \sup\{t \in [0, 1]; B_t = 0\}$  et  $d_1 = \inf\{t > 1; B_t = 0\}$ . Rappelons que presque sûrement  $B_1 \neq 0$ , de sorte que  $g_1 < 1 < d_1$ . Définissons alors l'excursion brownienne positive normalisée  $e(t)_{t \in [0, 1]}$  par :

$$e(t) = \frac{1}{\sqrt{d_1 - g_1}} |B_{g_1 + t(d_1 - g_1)}|$$

pour  $t \in [0, 1]$ , qui est une fonction positive continue, ne s'annulant qu'en 0 et en 1 (voir figure 3).

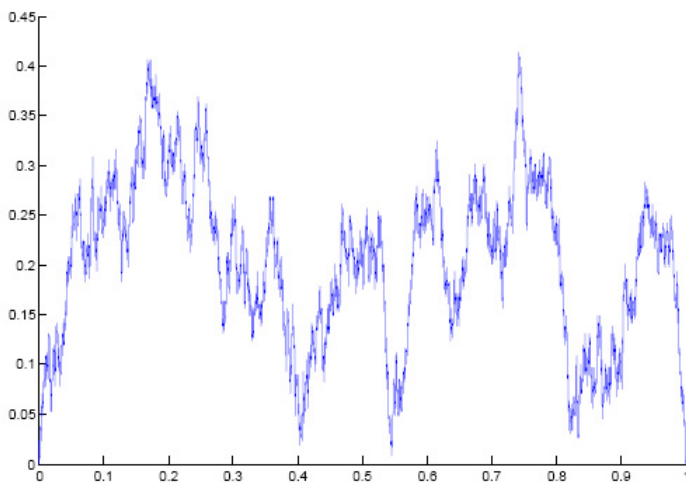


FIG. 3 – Une approximation de l'excursion brownienne normalisée.

Le théorème suivant décrit la loi de triangulation aléatoire continue  $\mathfrak{t}$ .

**Théorème 3.9** (Aldous). Définissons la variable aléatoire  $\mathfrak{t}' \in \mathcal{C}$  comme suit. Soit  $e(t)_{t \in [0,1]}$  une excursion positive normalisée du mouvement brownien linéaire. On définit  $\mathfrak{t}'$  comme la réunion des cordes joignant  $e^{2i\pi u}$  et  $e^{2i\pi v}$  pour tous les couples  $(u, v)$  tels que  $0 \leq u \leq v \leq 1$  et  $e_u = e_v = \min_{t \in [u,v]} e_t$ . Alors  $\mathfrak{t}'$  et  $\mathfrak{t}$  ont même loi.

**Remarque 3.10.** Insistons sur le fait que les triangulations  $\mathfrak{t}_n$  ne convergent pas presque sûrement mais en loi vers  $\mathfrak{t}$  : il s'agit en quelque sorte d'une convergence en « moyenne » et non pas « ponctuelle ».

**Remarque 3.11.** Pour voir que les composantes connexes du complémentaire de  $\mathfrak{t}'$  sont des triangles, on utilise le fait que les minima locaux d'un mouvement brownien sont distincts.

### 3.3 Convergence vers la triangulation continue uniforme

Nous expliquons maintenant pourquoi les théorèmes 3.7 et 3.9 doivent être vrais et pourquoi l'excursion brownienne normalisée apparaît dans la description de l'objet limite continu. À cet effet, le point crucial est de remarquer que le dual d'une triangulation discrète est un arbre et que lorsque la triangulation discrète est un élément uniforme parmi  $\mathbb{T}_n$ , celui-ci devient un arbre de Galton-Watson conditionné à avoir  $2n - 4$  arêtes, dont le comportement asymptotique est bien connu et fait justement intervenir l'excursion brownienne normalisée. Nous explicitons maintenant ceci avec de plus amples détails.

**Définition 3.12.** À chaque triangulation  $t$ , on associe son graphe dual  $\Phi(t)$  construit comme sur la figure 4. Il est facile de vérifier que  $\Phi(t)$  est un arbre plan, c'est-à-dire un graphe connexe sans cycles dessiné dans le plan. Pour plus de commodités, on dessine l'arbre en enlevant l'arête qui traverse le côté du polygone régulier joignant  $(1, 0)$  au sommet juste après (pour le sens trigonométrique) et en l'enracinant au sommet restant duquel était issue cette arête (voir la figure 4, où le sommet racine est le sommet grossi). Cet arbre enraciné sera noté  $\tilde{\Phi}(t)$ . Pour ne pas trop compliquer l'exposition avec des notations, nous ne définirons pas proprement ce qu'est un arbre plan : on se contentera de la vision intuitive d'un arbre dessiné dans le plan, avec un sommet racine à partir duquel sont issues des arêtes, montant vers le haut.

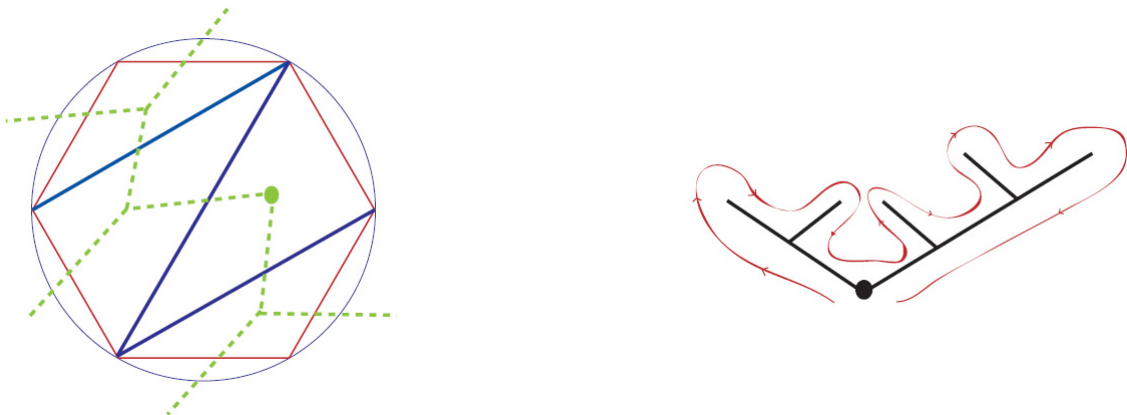


FIG. 4 – Une triangulation  $t$  de  $P_6$ , son dual  $\tilde{\Phi}(t)$  ainsi que cet arbre dessiné seul

**Remarque 3.13.** Par construction, à chaque face de  $t$  correspond un sommet interne de  $\Phi(t)$ . Ceci sera fondamental dans la suite.

**Définition 3.14.** Soit  $\mu$  une loi de probabilité sur  $\mathbb{N}$ . Un  $\mu$ -arbre de Galton-Watson (abrégé en  $GW_\mu$  dans la suite) est un arbre aléatoire tel que le nombre d'enfants de chaque sommet est une variable aléatoire de loi  $\mu$  et tel que les nombres d'enfants de sommets différents soient des variables aléatoires indépendantes. On peut démontrer que lorsque  $\sum_{i=0}^{\infty} k\mu(k) \leq 1$ , l'arbre est presque sûrement fini.

La propriété clé dont nous parlions ci-dessus est la suivante :

**Proposition 3.15.** Soit, pour  $n \geq 4$ ,  $\mathfrak{t}_n$  une triangulation uniforme de  $\mathbb{T}_n$ . Alors l'arbre  $\tilde{\Phi}(t)$  est un  $GW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $2n - 4$  arêtes, où  $\mu$  est définie par  $\mu(0) = 1/2$ ,  $\mu(2) = 1/2$  et  $\mu(k) = 0$  pour  $k = 1$  ou  $k \geq 3$ .

**Preuve.** Il est aisé de voir que l'application  $\tilde{\Phi}$  est une bijection entre  $\mathbb{T}_n$  et l'ensemble des arbres plans enracinés à  $2n - 4$  arêtes dont chaque sommet a 0 ou 2 enfants. Il suffit alors de vérifier qu'un  $GW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $2n - 4$  arêtes (avec  $\mu$  donné dans l'énoncé de la proposition) est un arbre uniforme parmi les arbres plans enracinés à  $2n - 4$  arêtes dont chaque sommet a 0 ou 2 enfants. Ceci provient du fait qu'un tel arbre a nécessairement  $n - 2$  sommets internes (insistons que c'est n'est pas vrai pour d'autres arbres). Nous laissons les détails au lecteur. ■

Ainsi, en quelque sorte, le comportement asymptotique de  $t_n$  est relié au comportement de grands arbres de Galton-Watson, que nous allons coder par une fonction continue. Ceci sera utile car il est assez aisé de travailler avec des fonctions continues lorsqu'on s'intéresse à des convergences en loi.

**Définition 3.16.** On code un arbre enraciné plan à  $n$  arêtes par une fonction continue, notée ici  $C$ , appelée *fonction de contour* et que nous définissons de manière informelle. Imaginons que toutes les arêtes soient d'une longueur unité et considérons une petite particule issue de la racine à l'instant 0 se déplaçant à vitesse unité le long des arêtes de l'arbre sans jamais rebrousser chemin jusqu'à revenir à la racine (un exemple d'ordre de parcours est dessiné sur la figure 4). Alors  $C(t)$  est, par définition, la distance de la particule à la racine à l'instant  $t$  (voir figure 5).



FIG. 5 – Fonction de contour de l'arbre apparaissant dans la figure 4

**Remarque 3.17.** Remarquons qu'un instant de minimum local est atteint lorsque la particule arrive pour la deuxième fois à un sommet interne et que réciproquement, à un nœud interne ayant 2 enfants correspond un minimum local de la fonction de contour.

**Théorème 3.18.** Notons  $C^{(n)}$  la fonction de contour d'un  $GW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  arêtes (où  $\mu$  est la mesure définie ci-dessus). Alors :

$$\left( \frac{1}{\sqrt{n}} C^{(n)}(2nt) \right)_{t \in [0,1]} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (2e(t))_{t \in [0,1]},$$

où la convergence a lieu en loi dans l'espace métrique des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme uniforme et  $e$  désigne l'excursion brownienne définie précédemment.

Ce théorème est fondé sur un théorème classique de Donsker conditionné, rappelé ci-après (nous référons le lecteur à un cours de probabilités avancées pour le premier point et à [4] pour le deuxième point).

**Théorème 3.19** (Donsker). Soient  $(X_i)_{i \geq 1}$  des variables aléatoires non nulles indépendantes de même loi, de carré intégrable et telles que  $\mathbb{E}[X_1] = 0$ . Notons  $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2]$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$  et pour  $t \geq 0$  quelconque, soit  $S_t$  l'interpolation linéaire construite à partir de  $S$  définie par :

$$S_t = (1 - \{t\})S_{[t]} + \{t\}S_{[t]+1}.$$

1. On a la convergence :

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} S_{nt} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (B_t)_{t \geq 0},$$

où la convergence a lieu en loi dans l'espace métrique des fonctions continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la métrique de convergence uniforme sur tout compact et  $(B_t)$  désigne un mouvement brownien réel standard.

2. Notons  $\tau = \inf\{n \geq 1; S_n = 0\}$  et supposons que  $\mathbb{P}[\tau = n] > 0$  pour tout  $n$  assez grand. Alors on a la convergence en loi conditionnée suivante :

$$\mathbb{E} \left[ F \left( \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 n}} S_{nt}, t \in [0, 1] \right) \mid \tau = n \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}[F(e_t, t \in [0, 1])],$$

où  $F$  est une application continue à valeurs réelles définies sur  $(\mathcal{C}[0, 1], \|\cdot\|_\infty)$ , l'espace des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  muni de la norme uniforme.

Nous avons explicitement donné ce théorème afin d'insister sur le fait que les variables aléatoires considérées doivent être de carré intégrable. Ceci ne sera pas le cas dans la dernière partie et la conclusion du théorème devra être modifiée.

**Idée de la preuve du théorème 3.18.** On utilise le théorème de Donsker conditionné avec des variables aléatoires judicieusement choisies. Considérons un  $GW_\mu$  arbre conditionné à avoir  $n$  arêtes, c'est-à-dire  $n+1$  sommets. Numérotons ces différents sommets  $u_0, \dots, u_n$  dans l'ordre suivant lequel la petite particule (définissant la fonction de contour) les visite. Notons ensuite  $k(u_i)$  le nombre d'enfants du sommet  $u_i$  (qui est donc une variable aléatoire de loi  $\mu$ ). On définit la marche  $W_0, \dots, W_n$  par  $W_0 = 0$  et  $W_{j+1} = W_j + k(u_j) - 1$  pour  $0 \leq j \leq n-1$ . On peut alors montrer le résultat suivant :  $(W_0, \dots, W_n)$  et  $(S_0, \dots, S_\tau)$  ont même loi, où  $(S_n)$  est une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  issue de 0 de loi des sauts  $\nu(k) = \mu(k+1)$  pour  $k \geq -1$  et :

$$\tau = \inf\{n \geq 1; S_n = -1\}.$$

Ceci permet d'utiliser le théorème de Donsker conditionné et explique la provenance de l'excursion brownienne normalisée. Il reste alors à voir le lien entre la fonction de contour et cette marche  $W$  mais nous ne rentrerons pas dans les détails et renvoyons à [5] pour les détails. ■

**Idée de la preuve des théorèmes 3.7 et 3.9.** Considérons la triangulation uniforme  $\mathfrak{t}_n$ , son arbre associé  $\tilde{\Phi}(\mathfrak{t}_n)$  et la fonction de contour  $C_{\mathfrak{t}_n}$  associée à cet arbre, qui est de loi  $C^{(2n-4)}$  d'après la proposition 3.15. Considérons le sous-ensemble compact du plan  $\mathfrak{t}'_n$  défini comme la réunion des cordes joignant  $e^{-2i\pi u}$  et  $e^{-2i\pi v}$  pour tous les couples  $(u, v)$  tels que  $0 \leq u \leq v \leq 1$  et  $C_{\mathfrak{t}_n}(u) = C_{\mathfrak{t}_n}(v) = \min_{t \in [u, v]} C_{\mathfrak{t}_n}(t)$  (voir la figure 6 et comparer avec l'énoncé du théorème 3.9). On dit que  $\mathfrak{t}'_n$  est construit à partir de  $C_{\mathfrak{t}_n}$  via la méthode des minimas locaux. Les théorèmes découlent



FIG. 6 – Triangulation associée à la fonction de contour de l'arbre de la figure 4 via la méthode des minimas locaux.

alors des deux remarques suivantes :

1. pour  $n$  grand,  $\mathfrak{t}'_n$  et  $\mathfrak{t}_n$  sont proches (ceci découle des remarques 3.13 et 3.17),
2. le compact  $\mathfrak{t}'_n$  converge en loi vers  $\mathfrak{t}'$  défini dans l'énoncé du théorème 3.9 (ceci découle du théorème 3.18 mais c'est a priori non trivial, puisque la convergence de fonctions de contour n'implique pas toujours la convergence des compacts construits via la méthode des minimas locaux). ■

**Remarque 3.20.** On peut se demander ce qui advient si on considère d'autres modèles aléatoires discrets que les triangulations (par exemple des quadrangulations, où toutes les faces sont des quadrilatères) ou si on utilise une autre loi que la loi uniforme. En regardant attentivement ce qu'on a fait, ce qui précède s'applique si la loi transférée sur les arbres de Galton-Watson vérifie les conditions d'application du théorème de Donsker. On a donc affaire au phénomène d'universalité que nous évoquions en introduction. On peut ensuite se demander ce qu'il se passe si justement ces conditions ne sont pas satisfaites. Nous répondrons partiellement à cette question dans la dernière partie.

### 3.4 Dimension de Hausdorff

Nous nous intéressons ici à la dimension de Hausdorff de la triangulation continue aléatoire, qui exprime, en un certain sens, rappelons-le, dans quelle mesure la triangulation remplit le disque.

**Théorème 3.21** (Aldous, Le Gall-Paulin). *Presque sûrement, la dimension de Hausdorff de la triangulation  $\mathfrak{t}$  vaut  $3/2$ .*



**Idée de la preuve du théorème 3.21.** Considérons la triangulation continue aléatoire  $\mathfrak{t}'$  construite à partir de l'excursion brownienne  $\mathfrak{e}$  et notons  $A_\epsilon$  l'ensemble des points du cercle unité desquels est issue au moins une corde de longueur  $\epsilon$ . Chaque corde étant de dimension de Hausdorff 1, on sent que, intuitivement du moins,  $\dim_H(\mathfrak{t}') = 1 + \dim_H(A_\epsilon)$ . Il reste à calculer la dimension de  $A_\epsilon$ . Nous ne rentrons pas dans les détails, mais la dimension de Hausdorff de  $A_\epsilon$  peut être reliée à la dimension de Hausdorff des points où l'excursion brownienne, restreinte à un intervalle  $]a, 1]$ , atteint son infimum courant. D'après un théorème de Lévy, la dimension de Hausdorff de ce dernier ensemble est égal à la dimension de Hausdorff de l'ensemble des zéros du mouvement brownien sur  $[0, 1]$ , qui vaut  $1/2$ . Beaucoup de choses sont cachées dans ce qui précède, mais c'est le fil directeur de la démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [1, 6] pour les détails. ■

## 4 Laminations aléatoires du disque et $2 - \frac{1}{\alpha}$

Dans les deux parties précédentes, nous avons vu comment construire deux triangulations continues du disque  $D$  différentes. Nous souhaitons maintenant autoriser les faces à avoir davantage de côtés et voulons que, sous des lois de probabilités convenables, on ait la convergence en loi vers un compact aléatoire constitué de faces qui ne soient pas toutes des triangles. À cet effet, nous allons autoriser nos compacts discrets à avoir des faces ayant beaucoup de côtés en les choisissant selon des poids de Boltzmann, ce qui assurera que de « grandes » faces demeurent à la limite.

Soient donc  $\alpha \in (1, 2]$  et  $(p_j)_{j \geq 2}$  une suite de réels positifs de somme totale égale à un, telle que  $p_1 = 0$  et qui vérifie, pour  $n$  grand,  $p_n \sim Cn^{-1-\alpha}$  pour une constante  $C$ .

**Remarque 4.1.** Considérons  $\mu$  la mesure de probabilité sur  $\mathbb{N}$  définie par  $\mu(k) = p_k$  pour  $k \geq 0$ . Remarquons qu'une variable aléatoire de loi  $\mu$  n'est pas de carré intégrable, sauf si  $\alpha = 2$ . En particulier, lorsque  $\alpha \neq 2$ , nous ne pouvons pas reproduire la démonstration du théorème 3.18 que nous avons esquissée car le théorème de Donsker n'est plus applicable. Il existe cependant une version du théorème de Donsker adaptée à notre cas : une marche aléatoire convenablement renormalisée de loi des pas  $\mu$  va converger en loi (dans un espace plus gros) vers une fonction aléatoire qui sera à incréments stationnaires et indépendants (comme le mouvement brownien) mais non continue, autrement dit un processus de Lévy. Nous ne rentrerons pas dans les détails, mais insistons sur le fait que les sauts correspondent (au moins intuitivement) à des individus qui ont énormément d'enfants. C'est grâce à ce phénomène que nous allons obtenir des faces de degré infini.

**Définition 4.2.** On note  $\mathbb{L}$  l'ensemble des *laminations* qui sont, par définition, des compacts du plan obtenus en rajoutant à  $P_n$  (pour  $n \geq 3$  quelconque) des diagonales de sorte que deux diagonales différentes ne puissent se couper qu'en leurs extrémités. À chaque lamination  $\omega$ , on associe son graphe dual  $\tilde{\Phi}(\omega)$  convenablement enraciné auquel on a retiré une arête comme à la définition 3.12. Notons finalement  $\mathbb{L}_n$  les laminations dont le graphe dual possède exactement  $n$  arêtes et définissons une mesure de probabilité de type Boltzmann sur  $\mathbb{L}_n$ . Plus précisément, à toute lamination  $\omega \in \mathbb{L}_n$ , on associe le poids :

$$\pi(\omega) = \prod_{f \text{ faces de } \omega} p_{\deg(f)-1},$$

où  $\deg(f)$  est le nombre de côtés de  $f$ . Soit finalement  $\mathbb{P}_n$  la mesure de probabilité sur  $\mathbb{L}_n$  obtenue en normalisant les poids  $\pi(\omega)$ . Autrement dit, pour  $\omega \in \mathbb{L}_n$  :

$$\mathbb{P}_n(\omega) = \frac{1}{Z_n} \pi(\omega),$$

pour une constante  $Z_n$  indépendante de  $\omega$ .

**Conjecture 4.3.** Pour un entier  $n$ , on note  $\mathfrak{l}_n$  une lamination aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n$ . Alors la suite  $(\mathfrak{l}_n)$  converge en loi dans l'espace métrique  $(\mathcal{C}, d_H)$  vers une lamination aléatoire notée  $\mathfrak{l}$  (voir figure 7). De plus, presque sûrement, la dimension de Hausdorff de  $\mathfrak{l}$  vaut  $2 - 1/\alpha$ . Finalement, pour  $\alpha \neq 2$ ,  $\mathfrak{l}$  possède des faces de degré infini et pour  $\alpha = 2$  la lamination  $\mathfrak{l}$  a la même loi que la triangulation aléatoire  $\mathfrak{t}$  définie précédemment.

Nous tâchons maintenant d'expliquer en quoi cette conjecture est vraisemblable. L'idée est la même que dans le cas des triangulations uniformes. À toute fonction continue  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $f(0) = f(1) = 0$  on peut associer un compact de  $D$  via la méthode des minimas locaux décrite dans le théorème 3.9. Ensuite, le point clé est de remarquer que si  $\mathfrak{l}_n$  une lamination aléatoire de loi  $\mathbb{P}_n$ , alors son graphe dual (convenablement enraciné, voir définition 3.12),  $\tilde{\Phi}(\mathfrak{l}_n)$ , est un arbre de Galton-Watson de loi de reproduction  $(p_j)$  conditionné à avoir  $n$  arêtes. Mais, comme nous l'avons vu, chaque arbre enraciné peut être codé par une fonction, appelée fonction de contour. D'une part, on peut voir que la

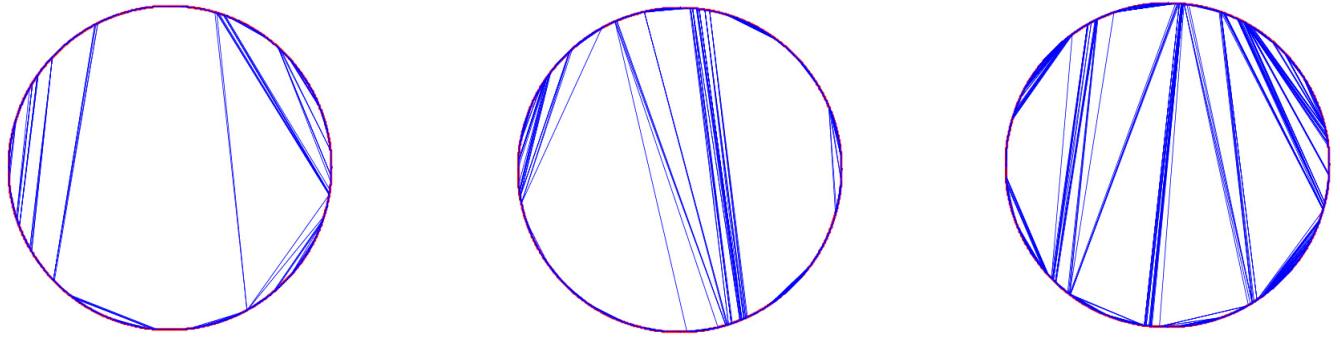


FIG. 7 – Des laminations de  $P_{2774}$  pour  $\alpha = 1.1$ ,  $P_{2728}$  pour  $\alpha = 1.5$  et de  $P_{2924}$  pour  $\alpha = 1.9$

lamination codée par cette fonction de contour est « proche » de la lamination  $\mathbf{l}_n$ . Ce point est plus délicat que dans le cas des triangulations uniformes, car il n’y a pas de lien simple entre le nombre de noeuds internes et nombre total d’arêtes pour des arbres généraux (voir la fin preuve de la proposition 3.15). D’autre part, on connaît bien le comportement asymptotique des fonctions de contour d’arbres de Galton-Watson considérés. Plus précisément :

- Dans le cas  $\alpha = 2$ , tout se passe comme dans le cas des triangulations uniformes : ces fonctions de contour, convenablement renormalisées, convergent en loi vers l’excursion brownienne normalisée  $e$  d’après le théorème 3.19. Ceci permet de dire que les laminations  $\mathbf{l}_n$  convergent en loi vers la lamination codée par  $e$  et fournit, comme nous l’avons vu, le théorème 3.7.
- Dans le cas  $1 < \alpha < 2$ , ces fonctions de contour, convenablement renormalisées, convergent en loi vers une certaine fonction continue aléatoire  $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  construite à partir d’un processus de Lévy  $\alpha$ -stable (voir la remarque 4.1 et [3] pour les détails). Ceci est un indice pour affirmer que les laminations  $\mathbf{l}_n$  convergent en loi vers la lamination codée par  $H$ . Comme  $H$  possède alors des minimas locaux atteints une infinité de fois, ceci expliquerait pourquoi  $\mathbf{l}$  possède des faces de degré infini. Le calcul de la dimension de Hausdorff devrait se faire similairement au cas de la triangulation continue uniforme.

**Remarque 4.4.** Il eut été plus naturel de définir  $\mathbb{L}_n$  comme étant constitué par les laminations de  $P_n$ . Dans ce cas, nous aurions obtenu, en passant au dual, des arbres de Galton-Watson conditionnés par leur nombre de feuilles (au lieu de conditionner par le nombre d’arêtes). Les résultats usuels de convergence ne s’appliquent plus et un autre argument est nécessaire. Toutefois, nous conjecturons que le résultat demeure vrai dans ce cadre-ci.

## Remerciements

Je voudrais remercier Nicolas Curien pour sa relecture de ce texte, ainsi que Jean-François Le Gall pour m’avoir initié aux laminations aléatoires du disque, éclairé sur plusieurs problèmes techniques et pour les discussions toujours fructifiantes.

## Références

- [1] D. Aldous, Triangulating the Circle, at Random, *Random. Amer. Math. Monthly* **101**, 223-233 (1994).
- [2] N. Curien, J.-F. Le Gall, Random recursive triangulations of the disk via fragmentation theory, à paraître dans *Ann. Probab.* (2010).
- [3] T. Duquesne, J.-F. Le Gall, Random Trees, Lévy Processes and Spatial Branching Processes, *Astérisque* **281** (2002).
- [4] W. D. Kaigh, An Invariance Principle for Random Walk Conditioned by a Late Return to Zero Source, *Ann. Probab.* **4** (1), 115-121 (1976).
- [5] J.-F. Le Gall, Random real trees, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Série* **6**, vol. XV, 35-62 (2006).
- [6] J.-F. Le Gall, F. Paulin, Scaling limits of bipartite planar maps are homeomorphic to the 2-sphere, *Geometric and Functional Analysis* **18**, 893-918 (2008).
- [7] O. Schramm, Scaling limits of loop-erased random walks and uniform spanning trees, *Israel J. Math.* **118**, 221-288 (2000).