TD9 – Variables aléatoires, fonctions caractéristiques

0 – Petite question

1. Calculer la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-|x|)\mathbb{1}_{|x|<1}$?
2. Quelle est la fonction caractéristique de la loi de probabilité de densité $(1-\cos(x))/(\pi x^2)$?

1 – Lois de variables aléatoires

Exercice 1. Soient X, Y et Z des variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $X = Y$ p.s. Montrer que X et Y ont la même loi. Montrer que la réciproque est fausse.
2. On suppose que X et Y ont la même loi.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que les variables aléatoires $f(X)$ et $f(Y)$ ont la même loi.
   (b) Montrer que les variables aléatoires XZ et YZ n'ont pas nécessairement la même loi.

Exercice 2. (Simulation de variables aléatoires.) Soient X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et F sa fonction de répartition définie par $F(t) = \mathbb{P}(X \leq t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Si F est continue et strictement croissante, et si U est une variable uniforme sur $[0,1]$, quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
2. Dans le cas général on définit F^{-1}, l'inverse continu à droite de F par,

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > u\}.$$

   Quelle est la loi de la variable aléatoire $F^{-1}(U)$?
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, et X la variable aléatoire définie par $X = -\frac{1}{p}\ln(U)$. Déterminer la loi de X.

Exercice 3. **(Variables exponentielles)**

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

1. On dit qu'une variable aléatoire réelle positive vérifie la propriété d'absence de mémoire si pour tous $s, t > 0$,
$$\mathbb{P}(X > t + s) = \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s).$$
Montrer qu'une variable aléatoire réelle positive X vérifie la propriété d'absence de mémoire si et seulement si X est exponentielle.
2. Soit X une variable aléatoire exponentielle. Calculer la loi de la variable aléatoire $\lfloor X \rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

2 – Fonctions caractéristiques

Notation. Si X est une variable aléatoire réelle, on notera ϕ_X sa fonction caractéristique, définie par $\phi_X(t) = \mathbb{E}\left[e^{itX}\right]$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Calculer les fonctions génératrices des lois suivantes :
   (a) Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.
   (b) Binomiale de paramètres (n, p), avec $n \in \mathbb{N}, p \in [0, 1]$.
   (c) Géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.
   (d) Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
2. Calculer les fonctions caractéristiques des lois suivantes :
   (a) Exponentielle de paramètre $\theta > 0$.
   (b) Uniforme sur $[0, 1]$.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que ϕ_X est de classe C^n et que pour tout entier $1 \leq k \leq n$, on a
$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \phi_X^{(k)}(t) = i^k \mathbb{E}\left[X^k \exp(itX)\right].$$
En particulier :
$$\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}\left[X^k\right] \tag{1}$$
2. On suppose que ϕ_X est 2 fois dérivable en 0. Montrer que X admet un moment d'ordre 2 et que $\mathbb{E}[X^2] = -\phi_X^{(2)}(0)$.
3. Soit $k \geq 2$ entier. On suppose que ϕ_X est k fois dérivable en 0. Montrer que X admet des moments jusqu'à l'ordre $2\lfloor k/2 \rfloor$ (ici $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x) donnés par (**??**).
4. Faire l'exercice **??**.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire réelle.

1. On suppose que X admet un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$:
$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{(n-1)!} \mathbb{E}\left[X^n \int_0^1 (1-u)^{n-1} \exp(ituX) du\right].$$
   (b) Montrer que
$$\phi_X(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right] + \frac{(it)^n}{n!} \epsilon_n(t),$$
   où $|\epsilon_n(t)| \leq 2\mathbb{E}[|X|^n]$ et $\lim_{t \to 0} \epsilon_n(t) = 0$.
2. On suppose que X admet des moments de tous ordres et que
$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\|X\|_n}{n} = \frac{1}{R} < \infty.$$
   Ici, $\|X\|_n = \mathbb{E}[|X|^n]^{1/n}$. Montrer qu'alors ϕ_X est développable en série entière au voisinage de tout réel, le rayon de convergence étant $\geq R/e$. En déduire que :
$$\forall t \in \left]-\frac{R}{e}, \frac{R}{e}\right[, \qquad \phi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \mathbb{E}\left[X^k\right].$$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. Soit F la fonction de répartition d'une mesure de probablitié μ telle que $F(x) \in \{0, 1\}$ pour tout $x \in D$, où D est un ensemble dense de $\mathbb{R}$. Montrer que μ est une mesure de Dirac.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire réelle de loi $P_X = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta_k$ symétrique (càd $a_k = a_{-k}$) et telle que $\sum_{k \geq 0} k a_k = \infty$. Le moment d'ordre 1 de X est-il fini ? Que dire de la dérivabilité en 0 de ϕ_X ? Comparer avec l'exercice **??**.

Exercice 9. **(Problème des moments)** On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$:
$$f(x) = \sin(2\pi \ln x) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right).$$
Calculer $\int_{\mathbb{R}+} x^k f(x) dx$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire des v.a. X et Y de densité respectives
$$\frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right) \quad \text{et} \quad (1 + \sin(2\pi \ln x)) \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\ln x^2}{2}\right)?$$

Exercice 10. **(Pouvoir paranormal moyen)** On considère l'expérience de divination suivante. On dispose d'un jeu de 52 cartes distinctes, d'un manipulateur et d'un devin. Le devin ne peut à aucun moment voir le jeu ou le manipulateur, et doit deviner quelle est la carte se trouvant sur le dessus du paquet. Il annonce donc une carte au hasard, et le manipulateur retourne silencieusement les cartes les unes après les autres jusqu'à tomber sur la carte annoncée par le devin. Après quoi ce dernier doit deviner la carte qui suit. Il annonce une carte au hasard parmi les 51 restantes, et le manipulateur continue de retourner les cartes à partir de l'endroit où il s'était arrêté. Ainsi de suite jusqu'à ce que tout le paquet soit retourné.

1. Donner un espace de probabilité correspondant à cette expérience.
2. Montrer que si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 1} \mathbb{P}(X \geq k).$$

3. Combien de cartes en moyenne le devin trouvera-t-il ?

Fin