TD8 – Formule du changement de variable

0 – Petite question

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R},\mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que pour toute fonction mesurable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ on a
$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$
Que dire de μ ?
2. On suppose maintenant que μ est finie et que pour toute fonction continue bornée $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ on a
$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$
Que dire de μ ? Et si la mesure μ n'est pas nécessairement finie ?

1 – Mesure image

Rappel (mesure image). Soient $(E,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré, $(F,\mathcal{B})$ un espace mesurable et $\phi:E\to F$ une fonction mesurable. On rappelle que l'on définit sur $(F,\mathcal{B})$ une mesure ν_ϕ appelée mesure image de μ par ϕ par
$$\nu_\phi(B) = \mu(\phi^{-1}(B)), \quad B\in\mathcal{B}.$$
On rappelle que pour tout fonction mesurable $f:F\to\mathbb{R}_+$, on a
$$\int_F f(x)\nu_\phi(dx) = \int_E f(\phi(x))\mu(dx).$$

Exercice 1. (**Formule des compléments**) On note Γ la fonction définie pour $x>0$ par
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt.$$

1. Calculer la mesure image de la mesure
$$x^{a-1}y^{b-1}e^{-(x+y)}\mathbb{1}_{\{x,y\geq 0\}}\,dx\,dy,$$
par l'application $(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2\mapsto(x+y,x/(x+y))$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt.$$

2 – Calculs de lois à densité

Exercice 2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\lambda\mu e^{-\lambda x-\mu y}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x,y)\,dx\,dy.$$

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

2. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{4\pi}e^{-x/2}\,\mathbb{1}_{\{x\geq 0\}}\mathbb{1}_{[0,2\pi]}(y)\,dx\,dy.$$

   Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X}\cos(Y), \sqrt{X}\sin(Y))$.

3. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}\,dx\,dy.$$

   Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.

Exercice 3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1}e^{-x^2/2}\,dx$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.

Exercice 4. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Réviser le cours et ce qui a été fait en TD. Chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sont disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax|x\rangle} \lambda_d(dx),$$

où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d$ et λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Rappel : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne $(X_1, \dots, X_n)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ de loi

$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n.$$

1. Construire, à l'aide des évènements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \dots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega) \ \text{ et } \ \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

   pour presque tout $\omega \in \Omega$.
2. Déterminer les lois des variables aléatoires $(Y_1, \dots, Y_n)$ et $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$.

Fin