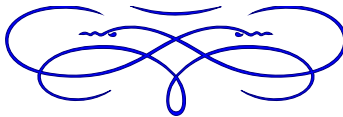


TD8 – Formule du changement de variable



0 – Petite question

Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.

1. On suppose que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Que dire de μ ?

2. On suppose maintenant que μ est finie et que pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ on a

$$\int f(x)\mu(dx) = \int f(x)g(x)dx.$$

Que dire de μ ? Et si la mesure μ n'est pas nécessairement finie ?

1 – Mesure image

Rappel (mesure image). Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (F, \mathcal{B}) un espace mesurable et $\phi : E \rightarrow F$ une fonction mesurable. On rappelle que l'on définit sur (F, \mathcal{B}) une mesure ν_ϕ appelée mesure image de μ par ϕ par

$$\nu_\phi(B) = \mu(\phi^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}.$$

On rappelle que pour tout fonction mesurable $f : F \rightarrow \mathbb{R}_+$, on a

$$\int_F f(x)\nu_\phi(dx) = \int_E f(\phi(x))\mu(dx).$$



Exercice 1. (Formule des compléments) On note Γ la fonction définie pour $x > 0$ par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Calculer la mesure image de la mesure

$$x^{a-1} y^{b-1} e^{-(x+y)} \mathbb{1}_{\{x, y \geq 0\}} dx dy,$$

par l'application $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 \mapsto (x + y, x/(x + y))$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. En déduire la formule des compléments :

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt.$$



2 – Calculs de lois à densité

Exercice 2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X, Y) une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^2 .

1. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\lambda \mu e^{-\lambda x - \mu y} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(x, y) dx dy.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire $U = \min(X, Y)$.

2. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{4\pi} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \mathbb{1}_{[0, 2\pi]}(y) dx dy.$$

Déterminer la loi de la variable aléatoire $(\sqrt{X} \cos(Y), \sqrt{X} \sin(Y))$.

3. On suppose que la loi de (X, Y) est

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} dx dy.$$

Calculer la loi de la variable aléatoire réelle $\frac{X}{Y}$.



Exercice 3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une variable aléatoire N à valeurs dans \mathbb{R} de loi $(\sqrt{2\pi})^{-1} e^{-x^2/2} dx$. Calculer la loi de la variable aléatoire $1/N^2$.



Exercice 4. On considère une source lumineuse ponctuelle située au point $(-1, 0)$ dans le plan. Soit θ une variable aléatoire définie sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. On suppose que la source émet un rayon lumineux en direction de l'axe des ordonnées en faisant un angle θ avec l'axe des abscisses. Déterminer la loi de l'ordonnée du point d'impact du rayon avec l'axe des ordonnées.



3 – À chercher pour la prochaine fois

Réviser le cours et ce qui a été fait en TD. Chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sont disponibles sur le site d'enseignement du DMA – <http://www.math.ens.fr/enseignement> – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'exams**).



4 – Compléments (hors TD)

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice symétrique définie positive. Calculer l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax|x \rangle} \lambda_d(dx),$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^d et λ_d désigne la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

Rappel : $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}$.



Exercice 6. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne (X_1, \dots, X_n) une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n de loi

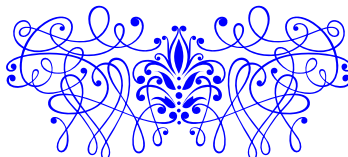
$$\mathbb{1}_{[0,1]^n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

1. Construire, à l'aide des événements $A_\sigma = \{X_{\sigma_1} < \dots < X_{\sigma_n}\}$ pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, n variables aléatoires Y_1, \dots, Y_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que

$$Y_1(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega) \text{ et } \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\} = \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\}$$

pour presque tout $\omega \in \Omega$.

2. Déterminer les lois des variables aléatoires (Y_1, \dots, Y_n) et $(Y_1/Y_2, \dots, Y_{n-1}/Y_n)$.



Fin