TD7 – Bouillon mathématique *à ma façon* – Corrigé

0 – Exercice ayant été préparé

Exercice 0. **(Spoiler : convolution inside)** Soit K un compact de $\mathbb{R}^d$ et Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ avec $K \subset \Omega$. Montrer qu'il existe f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $[0,1]$ telle que

$$f = 1 \text{ sur } K, f = 0 \text{ sur } \Omega^c.$$

Corrigé : Puisque K est un compact, $\mathrm{d}(K, \Omega^c) = c > 0$. Si ϕ est une fonction positive, $\mathcal{C}^\infty$ à support inclus dans $[-c/3, c/3]^d$ et d'intégrale 1, alors

$$f = \mathbb{1}_{K+[-c/3;c/3]^d} * \phi$$

convient. En effet, l'écriture

$$f(x) = \int \mathbb{1}_{K+[-c/3;c/3]^d}(x-u)\phi(u)du = \int_{[-c/3;c/3]^d} \mathbb{1}_{K+[-c/3;c/3]^d}(x-u)\phi(u)du$$

montre aisément que $f(x) = 1$ si $x \in K$ et $f(x) = 0$ si $x \in \Omega^c$. D'après l'exercice 1, f est C^∞. □

1 – Apéritif – Petites questions

0) Quels sont les théorèmes vus en cours avec une hypothèse « σ-fini » ?

Corrigé : Théorèmes de Radon-Nikodym, Théorèmes de Fubini et dualité $\mathbb{L}^1 - \mathbb{L}^\infty$, utilisation du lemme des classes monotones pour prouver que deux mesures sont égales (application à la preuve de l'unicité de la mesure de Lebesgue et de la mesure produit).

1) Pour quels espaces fonctionnels F, G peut-on définir la convolée $f * g$ avec $f \in F, g \in G$?

Corrigé : Pour $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), dx)$:

- $\mathbb{L}^p * \mathbb{L}^q$. Régularité de la convolée : uniformément continue, et lorsque $p, q \neq 1$, tendant vers 0 en $\pm\infty$.
- $\mathbb{L}^1 * \mathbb{L}^p$. Régularité de la convolée : définie presque partout, appartenant à $\mathbb{L}^p$.
- $\mathbb{L}^1_{loc} * \mathbb{C}^\infty$ (voir Exercice 1). Régularité de la convolée : C^∞.

□

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2 – Entrée – Convolution

Exercice 1. (**Approximation** C^∞)

1. Soient f une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire intégrable sur tout compact de $\mathbb{R}$) et φ une fonction de classe C^∞ à support compact. Montrer que la fonction $f*\varphi$ est définie *pour tout* $x\in\mathbb{R}$ et est de classe C^∞.
2. Soit $\phi : x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{1-x^2}\right)\mathbb{1}_{|x|<1}$, montrer que cette fonction est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.
3. En déduire que pour tout $p\in[1,\infty[$, l'ensemble des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$.

Corrigé :

1. On note K un compact tel que $\text{supp}(\varphi)\subset K$. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a
$$|\varphi(x-y)f(y)| \leq \|\varphi\|_\infty |f(y)|\mathbb{1}_{x-K}(y).$$
Or la fonction $y\mapsto |f(y)|\mathbb{1}_{x-K}(y)$ est intégrable. Donc $\varphi*f$ est définie pour x. Soit $M>0$. On note $K_M=[-M,M]-K$. On a pour $x\in[-M,M]$,
$$\varphi*f(x)=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-y)f(y)\mathbb{1}_{x-K}(y)\,dy=\int_{\mathbb{R}}\varphi(x-y)f(y)\mathbb{1}_{K_M}(y)\,dy.$$
En appliquant le théorème de continuité sous le signe intégrale, on montre que $\varphi*f$ est continue sur $[-M,M]$. Ceci étant vrai pour tout $M>0$ la fonction $\varphi*f$ est continue sur $\mathbb{R}$. Puis on montre de même que la fonction $\varphi*f$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Il suffit de montrer que $f : x\mapsto \exp\left(\frac{-1}{x}\right)1_{x>0}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour cela, on applique le théorème de la limite de la dérivée en 0, en remarquant que
$$\forall n\geq 1, \frac{\partial^n}{\partial x^n}f(x)\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$
3. Si $f\in\mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ alors f est localement intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus on peut construire $(\rho_n)_{n\geq 1}$ une approximation de l'unité telle que chaque ρ_n est de classe C^∞. Ainsi $f*\rho_n$ est de classe C^∞ et $f*\rho_n\to f$ dans $\mathbb{L}^p$.

□

3 – Plat de viande – Dualité $L^p - L^q$

Exercice 2. (**Séquentielle compacité faible**) Soit $p\in]1,\infty[$ et q son exposant conjugué, $\Omega\subset\mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (*c-à-d* que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ est bornée).

1. Montrer que $\mathbb{L}^q(\Omega)$ est séparable (c'est à dire qu'il contient une partie dénombrable dense).

2. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $h \in D$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\Omega)$,
$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible* dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f, c'est-à-dire :
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(\Omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$
5. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Corrigé :

1. On sait déja que les fonctions en escalier sont denses dans $\mathbb{L}^q$, il suffit donc d'en trouver une sous famille dénombrable qui soit dense dans les fonctions en escalier. Par exemple, celles qui vérifient : "les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sur lesquelles la fonction est constantes sont à bornes rationnelles, et les valeurs α_i de la fonction sur ces intervalles sont aussi rationnelles" constituent bien une famille dénombrable.
2. Il s'agit d'un simple procédé diagonal : on commence par numéroter tous les fonctions de D : $h_1, h_2, \ldots$. Considérons h_1, par Hölder, la suite $\left(\int f_n h_1 d\mu\right)_n$ est bornée par $\|h_1\|_q \sup_n \|f_n\|_p$, donc comme il s'agit d'une suite de réels, on peut trouver une extractrice ψ_1 telle que $\int f_{\psi_1(n)} h_1 d\mu$ converge. Ensuite en considérant la suite $\left(\int f_{\psi_1(n)} h_2 d\mu\right)_n$ on construit une extractrice ψ_2 telle que $\int f_{\psi_1 \circ \psi_2(n)} h_2 d\mu$ converge, et par récurrence on construit une suite d'extractrice $(\psi_k)_k$ qui vérifie que pour tout k
$$\int f_{\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k(n)} h_k d\mu \quad \text{converge quand } n \to \infty.$$
Si la famille (h_k) était finie, il suffirait de prendre $\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_N$ et on aurait ce qu'il faut, mais avec une famille infinie il faut ruser. on définit
$$\varphi(n) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_n(n).$$
Je laisse au lecteur le soin de vérifier que pour tout $n > k$, il existe $M \geq n$ tel que $\varphi(m) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k(M)$ et d'en déduire que $\int f_{\varphi(n)} h_k d\mu$ converge quand $n \to \infty$ pour tout k.
3. Le plus simple pour montrer que la suite $\int f_{\varphi(n)} g d\mu$ converge est de montrer qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et soit h une fonction de D qui vérifie $\|g - h\|_q < \varepsilon$. Soient $n, m \geq 0$,
$$\begin{aligned}\left|\int f_{\varphi(n)} g d\mu - \int f_{\varphi(m)} g d\mu\right| \quad &< \quad \left|\int f_{\varphi(n)}(g-h) d\mu\right| + \left|\int f_{\varphi(m)}(g-h) d\mu\right| \\ &\quad + \left|\int f_{\varphi(n)} h d\mu - \int f_{\varphi(m)} h d\mu\right|.\end{aligned}$$
Par Hölder les deux premiers termes sont inférieurs à $(\sup \|f_n\|_p)\varepsilon$ et comme la suite $\int f_{\varphi(n)} h d\mu$ converge (par la question précédente) elle est de Cauchy, donc il existe n_0 tel que si $n, m > n_0$,
$$\left|\int f_{\varphi(n)} g d\mu - \int f_{\varphi(m)} g d\mu\right| < (2 \sup \|f_n\|_p + 1)\varepsilon,$$
ce qui montre que la suite est de Cauchy.

4. À la question précédente on a définie une fonction de L^q dans $\mathbb{R}$:

$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int f_{\varphi(n)} g d\mu.$$

Ici on veut utiliser le théorème de dualité entre $\mathbb{L}^p$ et $\mathbb{L}^q$: si μ est σ-finie et $p < \infty$ alors il y a bijection entre $\mathbb{L}^q(\mu)$ et les formes linéaires continues sur $\mathbb{L}^p(\mu)$ et cette bijection est $f \mapsto \psi_f : g \mapsto \int f g d\mu$. Donc pour répondre à la question il suffit de montrer que ϕ est une forme linéaire continue. La linéarité est facile à montrer et la continuité découle de Hölder : $\phi(g) \leq (\sup \|f_n\|_p)\|g\|_q$. Et voila !

5. Non, le résultat n'est plus vrai pour $p = 1$: prenons la suite de fonction $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ qui est bien bornée dans $\mathbb{L}^1$, et supposons qu'il existe une extractrice φ et une fonction $f \in \mathbb{L}^1$ telle que pour toute fonction $g \in \mathbb{L}^\infty$, $\lim \int f_{\varphi(n)} g d\mu = \int f g d\mu$. Regardons des fonctions particulières :
   – la fonctions $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ montre que $\int_{\mathbb{R}} f \, d\mu = 1$
   – la suite de fonction $g_k = \mathbb{1}_{[k,k+1]}$ montre que $\int_k^{k+1} f \, d\mu = 0$ pour tout k

   Ces deux résultats sont contradictoires, ce qui conclut la preuve par l'absurde.

□

Exercice 3. **(Petit contre-exemple)** Soient $E = \{a,b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Conclure.

Corrigé : On a $\mathbb{L}^\infty = \{f : E \to \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{L}^1 = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0\}$. Donc le dual topologique de $\mathbb{L}^1$ est $(\mathbb{L}^1)' = \{f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \alpha f(a) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. On voit ici que l'application $g \in \mathbb{L}^\infty \mapsto \Phi_g \in (\mathbb{L}^1)'$ (où $\Phi_g : f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \int_E f g \, d\mu$) est surjective mais pas injective. La mesure μ n'est pas σ-finie et le théorème de dualité (avec $p = 1$ et $q = +\infty$) ne s'applique pas dans ce cas. □

4 – Plat de poisson – Mesures signées

Exercice 4. **(L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$)**

(i) Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme

$$\mu \mapsto \|\mu\|,$$

où $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$:

$$\|f\|_1 = \|f \cdot \mu\|,$$

où $(f \cdot \mu)$ est la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

Corrigé :

(i) Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$.

Étape 1 : pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ et $n, p \geq 1$, on a $|\mu_n(A) - \mu_p(A)| \leq \|\mu_n - \mu_p\|$, ce qui implique que la suite $(\mu_n(A))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et converge donc vers une limite notée $\mu(A)$.

Étape 2 : montrons que μ est une mesure. Prouvons tout d'abord que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)|; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = 0. \tag{1}$$

À cet effet, soient $\epsilon > 0$ et $n_0 > 1$ tels que $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \epsilon$ pour $n, k \geq n_0$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On choisit $k > n_0$ tel que $|\mu(A) - \mu_k(A)| < \epsilon$. Alors pour $n > n_0$:

$$|\mu(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu(A) - \mu_k(A)| + |\mu_k(A) - \mu_n(A)| \leq \epsilon + \|\mu_n - \mu_k\| \leq 2\epsilon,$$

ce qui prouve (1).

Ensuite, les mesures μ_n sont en particulier finiment additives, ce qui implique aisément que μ eſt finiment additive. Montrons maintenant que μ eſt σ-finie. Soient $(A_i)_{i\geq 1}$ des boréliens disjoints et $\epsilon > 0$. D'après (1), il exiſte $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$:

$$\sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)|;\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \leq \epsilon.$$

On choisit ensuite $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$:

$$\mu_n\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq \epsilon.$$

En particulier, ceci implique que pour $k \geq k_0$:

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq 2\epsilon.$$

Par additivité (finie) de μ, on obtient finalement pour tout $k \geq k_0$:

$$\left|\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) - \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\right| = \mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq 2\epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, la σ-additivité de μ en découle, ce qui prouve que μ eſt une mesure.

Étape 3 : on vérifie que $|\mu_n - \mu| \to 0$. Ceci découle immédiatement de (1) et de l'inégalité

$$\|\nu\| = \nu(X^+) + |\nu(X^-)| \leq 2\sup\{|\nu(A)|;\, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

vérifiée pour une mesure signée ν sur $\mathbb{R}$ (où on a noté $X^\pm$ les supports de $\nu^\pm$).

(ii) Il suffit de remarquer que l'écriture $f \cdot \mu = f^+ \cdot \mu - f^- \cdot \mu$ eſt la décomposition de Hahn de $f \cdot \mu$, ce qui implique :

$$\|f \cdot \mu\| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \|f\|_1.$$

5 – Fromage – Pour préparer le partiel à venir

Chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sur disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

6 – Dessert – Compléments (hors TD)

Exercice 5. (**Fonctions à variation finie**) Soit une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (ii) Il existe une mesure signée μ sur $[a,b]$ telle que $f(x)=\mu([a,x])$ pour tout $x\in[a,b]$.
   (iii) f est continue à droite et à variation bornée c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante
$$\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b}\sum_{i=1}^{n-1}|f(a_{i+1})-f(a_i)|<\infty.$$
2. Donner un exemple de fonction continue $[0,1]\longmapsto\mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Corrigé :

(i)$\Rightarrow$(ii) : On suppose que $f=g-h+f(a)$ avec g et h croissantes, continues à droite et $g(a)=h(a)=0$. Soit ν_g (resp. ν_h) la mesure de Stieltjes associée à g (resp. h). Posons
$$\mu=\nu_g-\nu_h+f(a)\delta_a.$$
Alors μ est une mesure signée sur $[a,b]$ telle que $f(x)=\mu([a,x])$ pour tout $x\in[a,b]$.

(ii)$\Rightarrow$(iii) : Il est évident que f est continue à droite. Soient $n\geq 2$ et $a_1,\ldots,a_n$ vérifiant $a\leq a_1<\ldots<a_n\leq b$. Alors
$$\sum_{i=1}^{n-1}|f(a_i)-f(a_{i-1})|=\sum_{i=1}^{n-1}|\mu(]a_{i-1},a_i])|\leq\sum_{i=1}^{n-1}|\mu|(]a_{i-1},a_i])\leq|\mu|([a,b]).$$
Donc f est à variation bornée.

(iii)$\Rightarrow$(i) : Pour tout $x\in[a,b]$, posons
$$V(x)=\sup_{n\geq 2, a\leq a_1<\ldots<a_n\leq x}\sum_{i=1}^{n-1}|f(a_{i+1})-f(a_i)|.$$
Alors V est croissante. On peut donc définir pour tout $x\in[a,b]$,
$$g(x)=\lim_{y\downarrow x}V(y).$$
Ainsi, g est croissante et continue à droite. Posons $h=g-f$. Alors h est continue à droite. Montrons que h est croissante. Soient $a\leq x<y\leq b$ et $\varepsilon>0$. Pour tous $n\geq 2$ et $a\leq a_1<\ldots<a_n\leq x$, on a
$$\begin{aligned}V(y+\varepsilon)-f(y+\varepsilon) &\geq |f(y+\varepsilon)-f(x)|+\sum_{i=1}^{n-1}|f(a_{i+1})-f(a_i)|+|f(x)-f(a_n)|-f(y+\varepsilon)\\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1}|f(a_{i+1})-f(a_i)|+|f(x)-f(a_n)|-f(x)\\ &\geq V(x)-f(x).\end{aligned}$$
Donc, $h(y+\varepsilon)\geq h(x)$ puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient $h(y)\geq h(x)$.

2. La fonction $f:x\in]0,1]\mapsto x\cos(1/x)$, prolongée par continuité en 0 n'est pas à variation bornée : considérer la subdivision
$$0<\frac{1}{n\pi}<\ldots<\frac{1}{3\pi}<\frac{1}{2\pi}<\frac{1}{\pi}<1.$$

Exercice 6. **(Théorème de Vitali-Saks)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures sur $\mathcal{A}$ est dite *absolument équicontinue* par rapport à la mesure μ si :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \in \mathcal{A}, & \mu(A_\epsilon) < +\infty \text{ et } \forall i \in I, \nu_i(A_\epsilon^c) < \epsilon, \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, & \mu(A) < \delta \Longrightarrow \forall i \in I, \nu_i(A) < \epsilon \end{cases}$$

On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe stable par intersection finie contenant X. Le but est de prouver le résultat suivant

Théorème de Vitali-Saks. Soit $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{A}$, absolument équicontinue par rapport à μ et telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu_n(C)$ existe dans $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \lim_n \nu_n(A)$ existe dans $\mathbb{R}_+$ et ν définit une mesure absolument continue par rapport à μ.

1. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A}; \nu(A) = \lim_n \nu_n(A) \text{ existe dans } \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par différence propre (c-à-d si $A, B \in \mathcal{B}$ avec $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \mathcal{B}$).
2. Soient $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{B}$ et B leur réunion. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k).$$
3. En déduire que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
4. Montrer que l'application ν est une mesure sur $\mathcal{A}$, absolument continue par rapport à la mesure μ.

Remarque : Contrairement à l'énoncé distribué en TD, il fallait lire $\mathbb{R}_+$ et non pas $\overline{\mathbb{R}}_+$. En effet, si on remplace $\mathbb{R}_+$ par $\overline{\mathbb{R}}_+$, l'énoncé devient faux. Voici un contre-exemple : $X = \{x, y\}$ (avec $x \neq y$), $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$, μ définie par $\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\{x\}) = 1, \quad \mu(\{y\}) = 1, \quad \mu(\{x, y\})$. On prend ensuite $\mathcal{C} = \{\{x\}, \{x, y\}\}$ et $(\nu_n)_{n\geq 1}$ définies par $\nu_n(\emptyset) = 0, \quad \nu_n(\{x\}) = n - \sin(n)^2, \quad \nu_n(\{y\}) = \sin(n)^2, \quad \nu_n(\{x, y\}) = n$.

Ébauche de corrigé :

1. Pas de difficulté.
2. D'abord voir que $\sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k) \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n(B)$ en utilisant le lemme de Fatou (pour la mesure de comptage). Pour prouver que $\limsup_{n\to\infty} \nu_n(B) \leq \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k)$, écrire pour tout $\epsilon > 0$ et $n, k \geq 1$:
$$\nu_n(B) \leq \sum_{j=1}^{k} \nu_n(B_j) + \nu_n\left(A_\epsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\right) + \nu_n(A_\epsilon^c \cap B),$$
et utiliser le fait que $\mu\left(A_\epsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\right) \to 0$ lorsque $k \to \infty$.
3. On voit que $\mathcal{B}$ est une classe monotone (on utilise ici l'hypothèse $X \in \mathcal{C}$), ce qui fournit le résultat désiré en utilisant le lemme de la classe monotone.
4. Pas de difficulté en utilisant l'équicontinuité.

Dans l'exercice suivant, on note $(f \cdot \mu)$ la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

Exercice 7. **(Exercice 2 dans $\mathbb{L}^1$: cas particulier du théorème de Dunford-Pettis)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe dénombrable stable par intersection finie contenant X.

1. Montrer que c'est le cas lorsque X est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

   Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de $\mathbb{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ (càd la suite $(\|f_n\|_1)_{n\geq 1}$ est bornée) telle que la suite de mesures $(|f_n|\cdot\mu)_{n\geq 1}$ est absolument équicontinue par rapport à μ.
2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ telle que les deux suites de mesures définies par $\nu^{\pm} := f_n^{\pm}\cdot\mu$ vérifient : pour tout $C\in\mathcal{C}$, $\lim_n \nu^{\pm}_{\phi(n)}(C)$ existent dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $f\in\mathbb{L}^1(X,\mathcal{A},\mu)$ vérifiant pour tout $A\in\mathcal{A}$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_A f_{\phi(n)}d\mu = \int_A f\,d\mu$.
4. En déduire la *convergence faible* de $f_{\phi(n)}$ vers f : $\forall g\in\mathbb{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_X f_{\phi(n)}g\,d\mu = \int_X fg\,d\mu$.
5. Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement au sens de d) (mais pour la suite elle-même) converge-t-elle nécessairement μ-p.p. ou en norme $\|\cdot\|_1$ vers f ? Comparer avec l'exercice 8 du TD3.

Ébauche de corrigé :

1. Prendre $\mathcal{U} = (U_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X avec $U_0 := X$, puis choisir $\mathcal{C}$ comme étant composée par les intersections finies d'éléments de $\mathcal{U}$.
2. Pour tout $C\in\mathcal{C}$, les suites $(\nu_n^{\pm}(C))_{n\geq 1}$ sont bornées, donc admettent une valeur d'adhérence. Utiliser ensuite le procédé d'extraction diagonal et la dénombrabilité de $\mathcal{C}$.
3. Appliquer l'exercice précédent aux suites de mesures $(\nu_n^{\pm})_{n\geq 1}$, puis le théorème de Radon-Nikodym à leur limite (justifier qu'on peut l'appliquer !)
4. Si $g\in\mathbb{L}^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$, voir que pour tout $\epsilon>0$, il existe une fonction étagée g_ϵ telle que $\|g-g_\epsilon\|_\infty<\epsilon$ (utiliser par exemple les fonctions f_n apparaissant dans la preuve de la Proposition 2.1.2 du poly)
5. Considérer la suite définie sur $[0,1]$ par $f_n(x)=\sin(nx)$.

Exercice 8. Soit (g_n) une suite de fonctions continues positives sur $I=[0,1]$. On note λ la mesure de Lebesgue sur I et μ une mesure positive de Borel sur I telle que

$$(i)\lim_n g_n(x) = 0\,\lambda\text{-p.p} \quad (ii)\int_I g_n d\lambda = 1 \text{pour tout} n\geq 1 \quad (iii)\lim_n \int_I f g_n d\lambda = \int_I f\,d\mu \text{ pour tout } f\in\mathcal{C}(I).$$

Peut-on en déduire que μ est étrangère à λ ?

Corrigé : Non ! Considérer la fonction g_n qui interpole linéairement les points

$$(0,0);(\frac{1}{n^3},2n^2);(\frac{2}{n^3},0);(\frac{1}{n};0);(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3},2n^2);(\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3},0),\ldots,(1-\frac{1}{n},0);(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3},2n^2);(1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^3},0);(1,0).$$

Alors cette suite de fonctions vérifient les hypothèses avec $\mu=\lambda$. □