TD4 – Calculs, constructions de mesures – Corrigé

0 – Exercice ayant été préparé

Exercice 1.

1. Dans le lemme de Fatou, montrer que si l'on remplace $\liminf$ par $\limsup$, $f_n \geqslant 0$ par $f_n \leqslant 0$ et $\geqslant$ par $\leqslant$, le théorème reste vrai. Montrer en revanche, à l'aide de contre-exemples, qu'on ne peut pas se permettre d'en changer certains mais pas les autres.

2. Donner un exemple de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 0}$ pour lesquelles l'inégalité est stricte dans le lemme de Fatou.

3. Dans le théorème de convergence dominée, vérifier, en donnant des exemples et contre-exemples, que si l'on oublie une hypothèse la conclusion peut rester vraie, ou pas !

4. Reprendre la question précédente avec le théorème de convergence monotone.

5. Soit (f_n) une suite de fonctions positives convergeant μ-pp vers f. Supposons que $\int f_n d\mu \longrightarrow c < \infty$. Montrer que $\int f d\mu$ est définie est appartient à $[0, c]$ mais ne vaut pas nécessairement c.

6. Construire une suite de fonctions continues f_n sur $[0, 1]$, avec $0 \leqslant f_n \leqslant 1$, et telle que

$$\lim \int_0^1 f_n(x)dx = 0,$$

sans toutefois que la suite $(f_n(x))$ ne converge pour aucun x de $[0, 1]$.

Corrigé: Tout d'abord, voici une tripotée d'exemples utiles:

La bosse glissante : $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$.

Le puits infini : $f_n = n\mathbb{1}_{[0,1/n]}$.

Pour les probabilistes : $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite iid de Bernoulli $1/2$.

Le stroboscope infernal : f_n est un plateau de largeur $1/n$ que l'on fait glisser sur le segment $[0, 1]$.

1. Pour la première partie, il suffit d'utiliser le lemme de Fatou avec $-f_n$ à la place de f_n. Pour les contre-exemples, choisir parmi la liste ci-dessus.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. Choisir un contre-exemple parmi la liste ci-dessus.

3. Si on oublie la condition de domination: si on prend $f_n = \frac{1}{n}\mathbb{1}_{[n,n+1]}$, la conclusion reste vraie (autre exemple: $f_n(x) = -n$ si $-1/n < x < 0$, $f_n(x) = n$ si $0 < x < 1/n$ et 0 sinon) ; mais si on prend la bosse glissante la conclusion est mise en défaut. Si on oublie la convergence presque partout: voir question 6. pour un exemple où la conclusion demeure, mais si on prend $f_n(x) = \sin(n)$ sur $[0, 1]$, la conclusion est mise en défaut.

4. Si on oublie la croissance: si on prend $f_n = \mathbb{1}_{\{n\}}$, la conclusion reste vraie, mais si on prend le puits infini, la conclusion est mise en défaut. Si on oublie la positivité: si on prend $f_n = -\mathbb{1}_{\{n\}}$, la conclusion reste vraie, mais si on prend $f_n(x) = -\frac{1}{x}\mathbb{1}_{]0,1/n[}(x)$, la conclusion est mise en défaut.

5. Prendre la bosse glissante.

6. Prendre le stroboscope infernal: $f_{n,k}(x) = \mathbb{1}_{]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}[}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

$\square$

1 – Calculs

Exercice 2.

1. Soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions $(E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ intégrables. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 0}\int_E |f_n| d\mu < \infty \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0}\left(\int_E f_n d\mu\right) = \int_E \left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right) d\mu.$$

2. Calculer les intégrales

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx, \quad \int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x - 1}dx.$$

Corrigé:

1. D'après le théorème de convergence monotone, la fonction $\sum_{n\geqslant 0}|f_n|$ est intégrable. Cela implique que la fonction $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ existe et est intégrable. De plus, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\left|\sum_{n=0}^N f_n\right| \leqslant \sum_{n\geqslant 0}|f_n| \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^N f_n \quad \xrightarrow[N\to\infty]{\text{p.p.}} \quad \sum_{n\geqslant 0} f_n.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^N f_n\right) d\mu \quad \xrightarrow[N\to\infty]{} \quad \int_E \left(\sum_{n\geqslant 0} f_n\right) d\mu.$$

Par ailleurs, pour tout $N \geqslant 0$,

$$\int_E \left(\sum_{n=0}^N f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^N \int_E f_n \, d\mu.$$

Et $\int_E f_n d\mu$ est le terme général d'une série absolument convergente par hypothèse. En passant à la limite quand $N \to +\infty$ dans l'égalité précédente, on obtient le résultat.

2. Pour tout $x \in]0,1[$, on a
$$\frac{\ln(x)}{1-x} = \sum_{n\geqslant 0} x^n \ln(x).$$
Posons pour tout $n \geqslant 0$, $f_n : x \in]0,1[\mapsto x^n \ln(x)$. Alors, par une intégration par parties, on obtient,
$$\int_0^1 |f_n(x)|\,dx = -\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}\,dx = \frac{1}{(n+1)^2}.$$
Donc $\sum_{n\geqslant 0} \int_0^1 |f_n(x)| dx < +\infty$. On peut donc appliquer la question 1. et l'on trouve,
$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{n\geqslant 0} x^n \ln(x)\right)\,dx = \sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 x^n \ln(x)\,dx = -\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$
Autre possibilité: Écrire $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx = \int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,dx$ et développer plutôt en série entière $\ln(1-x)$.

Pour tout $x > 0$, on a
$$\frac{\sin(ax)}{e^x-1} = e^{-x}\frac{\sin(ax)}{1-e^{-x}} = \sum_{n\geqslant 0} e^{-(n+1)x}\sin(ax).$$
Posons pour tout $n \geqslant 0$, $f_n : x \in]0,+\infty[\mapsto e^{-(n+1)x}\sin(ax)$. Alors, pour tout $x > 0$, $|f_n| \leqslant axe^{-(n+1)x}$, et
$$\sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty |f_n(x)| dx \leqslant \sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty axe^{-(n+1)x} dx = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(n+1)^2} < \infty.$$
Ainsi, d'après la question 1.,
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geqslant 0}\int_0^\infty f_n(x)\,dx.$$
On a,
$$\begin{aligned}\int_0^\infty f_n(x)\,dx = \int_0^\infty \left(e^{-(n+1)x}\frac{e^{iax}-e^{-iax}}{2i}\right)dx &= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(n+1)x-iax} - \frac{1}{(n+1)x+iax}\right)\\ &= \frac{a}{(n+1)^2+a^2}.\end{aligned}$$
Donc,
$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geqslant 1}\frac{a}{n^2+a^2}.$$
$\square$

Exercice 3. En utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégrale et l'égalité
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 1,$$

calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Rappel : La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx$$

Corrigé: La transformée de Fourier de f est donnée par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

Or

$$\frac{\partial e^{itx} f(x)}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{et} \quad |ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}| \leqslant xe^{-\frac{x^2}{2}} \in \mathcal{L}_1(dx).$$

On peut donc dériver sous le signe intégrale puis intégrer par parties pour obtenir

$$\hat{f}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} ixe^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} te^{-\frac{x^2}{2}} e^{itx}\, dx = -t\hat{f}(t).$$

La fonction $\hat{f}$ est donc solution de l'équation différentielle $\hat{f}' = -t\hat{f}$ avec la condition initiale $\hat{f}(0) = 1$, donc $\hat{f}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \geqslant 0$. □

Exercice 4. (Partiel 2008) Étudier la convergence des suites:

$$u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} dt, \qquad v_n = n \int_{]0,1[} \ln\left(1 + \frac{1}{n(1-x)}\right) dx.$$

Dans chacun des cas, on précisera la limite si elle existe et on justifiera soigneusement la réponse.

Corrigé: Pour u_n, on écrit

$$u_n = \int_{]0,1[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} dt + \int_{]1,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)} dt = I_n + J_n$$

et on étudie séparément les deux intégrales I_n et J_n.

Pour la première, on remarque que sur $]0,1[$ la quantité $\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}$ tend simplement vers $\frac{1}{1+t} \mathbb{1}_{t \in]0,1[}$, en étant dominée en valeur absolue par $1/(1+t)$, qui est une fonction intégrable sur $]0,1[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $I_n \to \int_{]0,1[} \frac{1}{1+t} dt = \ln(2)$.

Pour la seconde, pour $n \geqslant 1$, on remarque que sur $]1,\infty[$ la quantité $\frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}$ tend simplement vers 0, en étant dominée en valeur absolue par $\frac{1}{t(1+t)}$, qui est une fonction intégrable sur $]1,\infty[$ indépendante de n. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, $J_n \to 0$. On conclut que $u_n \to \ln(2)$.

Pour v_n, on remarque que pour $x \in]0,1[$, $n \ln\left(1 + \frac{1}{n(1-x)}\right) \to \frac{1}{1-x}$ et que $\int_{]0,1[} \frac{1}{1-x} dx = \infty$. D'après le lemme de Fatou, on en tire que

$$\infty = \int_{]0,1[} \left(\liminf_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n(1-x)}\right)\right) dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{]0,1[} n \ln\left(1 + \frac{1}{n(1-x)}\right) dx,$$

ce qui implique $v_n \to \infty$. □

Exercice 5. Soit $\varphi : ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$F(t) = \int_{[0,1]} \sqrt{\varphi(x)^2 + t}\, dx. \tag{1}$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur φ pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé:

1. On pose, pour tous $t \geqslant 0$ et $x \in [0,1]$, $f(x,t) = \sqrt{\varphi(x)^2 + t}$. Pour tout $t \geqslant 0$, $f(x,t) \leqslant |\varphi(x)| + \sqrt{t}$ qui est intégrable sur $[0,1]$. La fonction F est donc bien définie. De plus, pour tout $A > 0$ et pour tout $t \in [0, A]$, $f(x,t) \leqslant |\varphi(x)| + \sqrt{A}$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, F est continue sur tout ensemble de la forme $[0, A]$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. La fonction f est de plus dérivable par rapport à t en tout $t > 0$ et

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + t}}.$$

Soient $a > 0$ et $t \geqslant a$. On a alors

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

Ainsi, F est dérivable sur tout ensemble de la forme $[a, +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$F'(t) = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{\varphi(x)^2 + t}}\, dx.$$

2. Soit $(t_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissant vers 0. On a

$$\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n} = \int_0^1 \frac{\sqrt{\varphi(x)^2 + t_n} - |\varphi(x)|}{t_n}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\varphi(x)^2 + t_n} + |\varphi(x)|}\, dx.$$

D'après le théorème de convergence monotone,

$$\frac{F(t_n) - F(0)}{t_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{2|\varphi(x)|}\, dx.$$

Ainsi, F est dérivable en 0 si et seulement si $1/|\varphi|$ est intégrable.

□

Exercice 6. Soit $f : ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[) \to ([0, +\infty[, \mathcal{B}([0, +\infty[))$ une fonction mesurable.

1. Montrer que l'on définit une fonction continue $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par la formule

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{\arctan(xf(t))}{1+t^2}\,dt\,, \quad x \geqslant 0.$$

2. Calculer la limite de $F(x)$ quand $x \to \infty$.

3. Montrer que F est dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que F soit dérivable en 0.

Corrigé:

1. On pose $g(x,t) = \arctan(xf(t))/(1+t^2)$ pour $x \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$. Alors pour tout $t \geqslant 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est continue. De plus pour tout $x \geqslant 0$ la fonction $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable et $|g(x,t)| \leqslant \pi/(2(1+t^2))$. Donc d'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction F est continue sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers $+\infty$. Alors $g(x_n, t) \to \pi/(2(1+t^2))\mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}$ pour tout $t \geqslant 0$. La domination utilisée à la question précédente permet d'utiliser le théorème de convergence dominée et d'obtenir que

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)}\,\mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\,dt.$$

   Ainsi

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\pi}{2(1+t^2)}\,\mathbb{1}_{\{f(t)\neq 0\}}\,dt.$$

3. Pour tout $t \geqslant 0$ la fonction $x \mapsto g(x,t)$ est dérivable de dérivée

$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial x} = \frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}.$$

   Soit $a > 0$. Pour tout $x \geqslant a$ on a

$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leqslant \frac{1}{a(1+t^2)}.$$

   Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et ceci pour tout $a > 0$, elle est donc dérivable sur $]0, +\infty[$.

4. On va montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ si et seulement si la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ est intégrable. Supposons que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ soit intégrable. Alors pour tout $x \geqslant 0$ on a

$$\left|\frac{f(t)}{(1+t^2)(1+x^2(f(t))^2)}\right| \leqslant \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

   Donc d'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction F est dérivable sur $[0, +\infty[$. Supposons maintenant que la fonction $t \mapsto f(t)/(1+t^2)$ ne soit pas intégrable. Soit $(x_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels positifs convergeant vers 0. Alors pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{f(t)}{(1+t^2)}.$$

Donc d'après le lemme de Fatou,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{\arctan(x_n f(t))}{x_n(1+t^2)}\, dt = \infty.$$

Ainsi $F(x_n)/x_n \to \infty$ quand $n \to \infty$. □

2 – Constructions de mesures

Exercice 7. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On suppose que pour tous $a < b$,

$$\int_{]a,b[} f(x)\, \lambda(dx) = 0.$$

Montrer que $f = 0$ λ-p.p.

Corrigé:

Solution 1. On vérifie aisément que la classe des boréliens A tels que $\int_A f(x)\, \lambda(dx) = 0$ est une classe monotone (pour la stabilité par union croissante on peut utiliser le théorème de convergence dominée). Elle contient les intervalles ouverts, qui forment une classe stable par intersections finies engendrant la tribu borélienne. On a donc $\int_A f(x)\, \lambda(dx) = 0$ pour tout borélien A d'après le lemme de la classe monotone. En particulier,

$$\int_{\{f>0\}} f\, d\lambda = 0.$$

Or $f\mathbb{1}_{\{f>0\}}$ est une fonction positive donc $f\mathbb{1}_{\{f>0\}} = 0$ λ-p.p. De même, $f\mathbb{1}_{\{f<0\}} = 0$ λ-p.p. Donc $f = 0$ λ-p.p.

Solution 2. Soient f^+ et f^- respectivement les parties positive et négative de f, et les mesures positives $d\nu_+ = f^+ d\lambda$ et $d\nu_- = f^- d\lambda$. On a, pour tous $a < b$, $\nu_+(]a, b[) = \nu_-(]a, b[)$. Or ν_+ et ν_- sont des mesures boréliennes positives de masse finie, donc le théorème d'unicité des mesures implique $\nu_+ = \nu_-$. Ainsi,

$$\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \int_A f\, d\lambda = 0.$$

On conclut comme dans la solution 1.

□

Exercice 8. On se donne deux mesures positives boréliennes μ et ν sur $\mathbb{R}$, et on suppose que pour tout choix de $a < b \in \mathbb{R}$

$$\mu(]a, b[) \leqslant \nu(]a, b[) < \infty.$$

Montrer alors que $\mu(A) \leqslant \nu(A)$ pour tout borélien A.

Corrigé: Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrons que $\mu(O) \leqslant \nu(O)$. Il existe une suite d'intervalles $(]a_n, b_n[)_{n\geqslant 1}$ telle que

$$O = \bigcup_{n\geqslant 0}]a_n, b_n[$$

où l'union est disjointe. Ainsi

$$\mu(O) = \sum_{n \geqslant 0} \mu(]a_n, b_n[) \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \nu(]a_n, b_n[) = \nu(O).$$

Puis, les mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ étant régulières extérieurement, on a pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O);\ A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} = \inf\{\nu(O);\ A \subset O, O \text{ ouvert de } \mathbb{R}\} = \nu(A).$$

Cela conclut. □

Exercice 9. (Fonction de répartition d'un ensemble) Soit A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ de mesure finie. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \lambda(]-\infty, x] \cap A)$ est continue.

Corrigé: Elle est 1-Lipschitzienne ! Si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda([x, y] \cap A) \leqslant |x - y|.$$

□

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 10. (La fonction Γ)
Pour tout $t > 0$ on pose

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x} dx.$$

1. Montrer que ceci définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Montrer la formule d'Euler : pour tout $t > 0$,

$$\Gamma(t) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^t n!}{t(t+1)\dots(t+n)}.$$

Indication: on pourra considérer la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 0}$ définies par

$$f_n : x \in]0, \infty[\mapsto 1_{]0,n[}(x) \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}.$$

Corrigé:

1. Pour tout $t > 0$, la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto g(t,x) = x^{t-1}e^{-x}$ est intégrable donc Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $x > 0$, g est k-fois dérivable par rapport à t et
$$\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k} = (\ln(x))^k x^{t-1}e^{-x}.$$
Pour tous $A > a > 0$, $t \in [a, A]$ et $x > 0$, on a
$$\left|\frac{\partial^k g(x,t)}{\partial t^k}\right| \leqslant \left|(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}\right| \mathbb{1}_{\{x\geqslant 1\}} + \left|(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}\right| \mathbb{1}_{\{x<1\}},$$
et la fonction $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto |(\ln(x))^k x^{A-1}e^{-x}|\mathbb{1}_{\{x\geqslant 1\}} + |(\ln(x))^k x^{a-1}e^{-x}|\mathbb{1}_{\{x<1\}} \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}_+^*, \lambda)$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégrale, Γ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur tout ensemble de la forme $[a, A]$ et ceci pour tout $k \geqslant 1$. On obtient donc le résultat.

2. On fixe $t > 0$. On voit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge p.p. vers $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x^{t-1}e^{-x}$ et de plus pour tout $x > 0$, $|f_n(x)| \leqslant x^{t-1}e^{-x}$. Donc, d'après le théorème de convergence dominée, on a
$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx.$$
Or, en posant $u = x/n$, on a
$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{t-1}\,dx = n^t \int_0^1 (1-u)^n u^{t-1}\,dt = n^t I_n(t).$$
On montre par une intégration par parties que $I_n(t) = (nI_{n-1}(t+1))/t$ pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit que
$$I_n(t) = \frac{n!}{t(t+1)\dots(t+n-1)} I_0(t+n) = \frac{n!}{t(t+1)\dots(t+n-1)(t+n)}.$$

□

Exercice 11. Soit $\varphi : ([0,1], \mathcal{B}([0,1])) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction intégrable pour la mesure de Lebesgue. On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ par
$$G(t) = \int_{[0,1]} |\varphi(x) - t|\,dx.$$

1. Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que G est dérivable en $t \in \mathbb{R}$ si et seulement si
$$\lambda(\{\varphi = t\}) = 0,$$
où λ désigne la mesure de Lebesgue.

Corrigé:

1. Même méthode qu'à la question 1. de l'exercice 5.

2. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $h \neq 0$, on a

$$\frac{G(t+h) - G(t)}{h} = \int_0^1 \frac{|\varphi(x) - t - h| - |\varphi(x) - t|}{h} \, dx.$$

Soit $(h_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels strictement positifs décroissant vers 0. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\frac{|\varphi(x) - t - h_n| - |\varphi(x) - t|}{h_n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \mathbb{1}_{[\varphi(x), +\infty[}(t) - \mathbb{1}_{]-\infty, \varphi(x)[}(t),$$

et $|\varphi(x) - t - h_n| - |\varphi(x) - t| \leqslant h_n$. Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée, la fonction G est dérivable à droite en t et

$$G'_d(t) = \lambda(\{\varphi \leqslant t\}) - \lambda(\{\varphi > t\}).$$

De même, G est dérivable à gauche en t et

$$G'_g(t) = \lambda(\{\varphi < t\}) - \lambda(\{\varphi \geqslant t\}).$$

Ainsi $G'_d(t) - G'_g(t) = \lambda(\{\varphi = t\})$ ce qui implique le résultat. □

Exercice 12. (– Théorème de Lusin) Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue $g : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\lambda(\{x, f(x) \neq g(x)\}) \leqslant \varepsilon.$$

Corrigé: Commençons par le cas où $f = \mathbf{1}_A$ avec A borélien de $[0, 1]$. Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un fermé F et un ouvert O tels que

$$F \subset A \subset O \text{ et } \lambda(O \backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

Il existe alors une fonction continue à valeur dans $[0, 1]$ qui vaut 1 sur F et 0 en dehors de O, en effet $d(F, O^c) = \eta > 0$ par compacité et on vérifie que la fonction

$$f_{F,O} : x \mapsto \sup\left(\left(1 - \frac{d(x, F)}{\eta}\right), 0\right),$$

vérifie bien les conditions requises. Donc la fonction $f_{F,O}$ est continue et

$$\lambda(\{x, f(x) \neq f_{F,O}(x)\}) \leqslant \lambda(O \backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

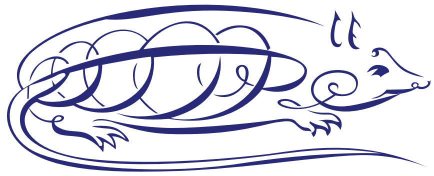
Dans le cas général, on peut supposer que $0 \leqslant f \leqslant 1$ et on définit par récurrence

- $f_1 = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{f \geqslant 1/2}$
- $f_2 = \frac{1}{4} \mathbf{1}_{(f - f_1) \geqslant 1/4}$
- $f_3 = \frac{1}{8} \mathbf{1}_{(f - f_1 - f_2) \geqslant 1/8}$

- ...

Ainsi $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ et pour tout n, $2^n f_n$ est une fonction indicatrice d'un borélien de $[0, 1]$. D'après les résultats précédents pour chaque $n \geqslant 1$, il existe une fonction $0 \leqslant h_n \leqslant 1$ continue telle que $\lambda(x, h_n(x) \neq 2^n f_n(x)) \leqslant \varepsilon 2^{-n}$. La fonction continue $h = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} h_n$ répond alors à la question.

$\square$



Fin