TD2 – Fonctions mesurables

1 – Petites questions

1) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pourquoi f est-elle mesurable?

2) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple $\mathbb{R}$), et $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions $X \to \mathbb{R}$ mesurables. Pourquoi la fonction $\limsup_{n\to\infty} f_n$ est-elle mesurable?

3) Soit $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pourquoi la fonction dérivée f' est-elle mesurable?

2 – Fonctions mesurables

Exercice 1.

a) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(f_n : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}})_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ admette une limite finie est mesurable.

   INDICATION: Pensez au critère de Cauchy.

b) $(\star)$ Soient $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et $(f_n : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers une fonction $f : E \to X$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $n \to \infty$.

   Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \to (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Exercice 2. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

a) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A.

b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 3 (Théorème d'Egoroff)**.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geqslant 1$ tel que

$$\mu\left(\bigcup_{j \geqslant n} \left\{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\right\}\right) \leqslant \eta.$$

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) \leqslant \varepsilon$ tel que $f_n \to f$ uniformément sur $E \setminus A$.
3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Exercice 4 (Tribu réciproque)**.** Soit $f : (E, \mathcal{A}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable.

1. Montrer que $\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu. On l'appelle **tribu engendrée par** f.
2. Montrer que c'est la plus petite tribu sur E qui rende f mesurable.
3. Montrer que toute fonction $g : E \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable pour $\mathcal{A}_f$, s'écrit $g = h \circ f$ avec $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

   INDICATION: commencer par le cas où g est étagée.
4. (EXEMPLE.) Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.
   (a) Montrer que la tribu image-réciproque par f est $\mathcal{A}_f := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.
   (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Exercice 5. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec μ non nulle et $f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Exercice 6. Soit $C = C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note $\mathcal{C}_1$ la tribu borélienne de C et $\mathcal{C}_2$ la plus petite tribu de C rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x. Comparer les tribus $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

3 – À préparer pour la prochaine fois

Exercice 7 (Mesure image)**.**
Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, $(F, \mathcal{B})$ un espace mesurable et $f : E \to F$ une fonction mesurable. On rappelle que l'on définit sur $(F, \mathcal{B})$ une mesure ν_f appelée mesure image de μ par f par

$$\nu_f(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Soit $\phi : F \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int_F \phi(x)\nu_f(dx) = \int_E \phi(f(x))\mu(dx).$$

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 8 (Exemples et contre-exemples)**.** Répondre aux questions suivantes, si la réponse est positive donner une démonstration, si la réponse est négative donner un contre-exemple. On munit $\mathbb{R}$ de la mesure de Lebesgue :

1. Un ouvert de $\mathbb{R}$ de mesure finie est-il borné ?
2. Un borélien de mesure strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Un ouvert dense de $[0, 1]$ a-t-il une mesure 1 ?
4. Deux compacts homéomorphes ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
5. $(\star)$ Existe-t-il un borélien A de $\mathbb{R}$ tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I, on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Exercice 9. Soit $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \bar{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Exercice 10 $(\star)$**.** Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathcal{R})$ une fonction mesurable telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

ON POURRA ADMETTRE LE RÉSULTAT SUIVANT (théorème de Lusin, prouvé ultérieurement): si une fonction $g : ([a, b], \mathcal{B}([a, b]) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subset [a, b]$ tel que $\mu([a, b] \cap K_\epsilon^c) \leqslant \epsilon$ et la restriction de g à K est continue.

Fin