

TD2 – Fonctions mesurables – **Corrigé**

0 – Exercice qui avait été préparé chez soi

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) = 1$. Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ deux sous-ensembles de $\mathcal{P}(\Omega)$ constitué d'ensembles mesurables. On suppose que \mathcal{A} et \mathcal{B} sont stables par intersections finies et que pour tous $A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}$:

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B).$$

Montrer que pour tous $U \in \sigma(\mathcal{A})$ et $V \in \sigma(\mathcal{B})$ on a:

$$\mu(U \cap V) = \mu(U) \cdot \mu(V).$$

Corrigé:

Première étape. On introduit

$$G_1 = \{U \in \mathcal{F}; \forall B \in \mathcal{B}, \mu(U \cap B) = \mu(U) \cdot \mu(B)\}.$$

G_1 est une classe monotone contenant \mathcal{A} , qui est stable par intersections finies. Donc, d'après le théorème de la classe monotone, $\sigma(\mathcal{A}) \subset G_1$.

Deuxième étape. On introduit

$$G_2 = \{V \in \mathcal{F}; \forall U \in \sigma(\mathcal{A}), \mu(U \cap V) = \mu(U) \cdot \mu(V)\}.$$

G_2 est une classe monotone contenant \mathcal{B} (d'après la première étape), qui est stable par intersections finies. Donc, d'après le théorème de la classe monotone, $\sigma(\mathcal{B}) \subset G_2$, ce qui conclut.

1 – Petites questions

1) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple \mathbb{R}), et $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pourquoi f est-elle mesurable?

Réponse: Pour tout ouvert O de \mathbb{R} , $f^{-1}(O)$ est ouvert (car f continue), donc mesurable. Comme l'ensemble des ouverts de \mathbb{R} engendre la tribue borélienne, f^{-1} est continue.

Remarque. Plus généralement, pour montrer que $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ est mesurable, il suffit de montrer que $f^{-1}(C)$ est mesurable pour tout C appartenant à une ensemble de parties mesurables engendrant \mathcal{B} . En effet, $\{B \in \mathcal{B}; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu. Ainsi, si elle contient une partie \mathcal{C} , elle contient alors $\sigma(\mathcal{C})$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, **n'hésitez pas** à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr, ou bien à venir me voir au bureau V4.

2) Soient (X, d) un espace métrique (par exemple \mathbb{R}), et $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $X \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables. Pourquoi la fonction $\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ est-elle mesurable?

Réponse: Il suffit de montrer que $\sup_{n \geq 1} f_n$ et $\inf_{n \geq 1} f_n$ sont mesurables. Faisons le pour $\sup_{n \geq 1} f_n$ (l'autre cas étant similaire) en appliquant la remarque précédente (rappelons que $]a, \infty[; a \in \mathbb{R}$ engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R})$): il suffit de montrer que pour tout $a > 0$, $\{x; \sup_{n \geq 1} f_n(x) > a\}$ est mesurable. Ceci découle de l'écriture:

$$\left\{ x; \sup_{n \geq 1} f_n(x) > a \right\} = \bigcup_{n \geq 1} \{x; f_n(x) > a\}.$$

C'est un ensemble mesurable, étant une union dénombrable d'ensembles mesurables (car $\{x; f_n(x) > a\} = f_n^{-1}(]a, \infty[)$ est mesurable, f_n étant mesurable).

3) Soit $f :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Pourquoi la fonction dérivée f' est-elle mesurable?

Réponse: Pour $x \in]0, 1[$,

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x + 1/n) - f(x)}{1/n},$$

ainsi f' est mesurable comme une limite simple de fonctions mesurables.

2 – Fonctions mesurables

Exercice 2.

a) Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable et $(f_n : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}})_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble des x tels que $(f_n(x))_{n \geq 1}$ admette une limite finie est mesurable.

INDICATION: Pensez au critère de Cauchy.

b) (\star) Soient (E, \mathcal{A}) un espace mesurable, (X, d) un espace métrique et $(f_n : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X)))_{n \geq 1}$ une suite de fonctions mesurables. On suppose que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers une fonction $f : E \rightarrow X$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in E$, $f_n(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $n \rightarrow \infty$).

Montrer que $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (X, \mathcal{B}(X))$ est mesurable.

Corrigé:

a) Écrivons le critère de Cauchy :

$$\begin{aligned} (f_n(x)) \text{ converge} &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \\ (f_n(x)) \text{ converge} &\iff x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n, m \geq N} \{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\} \right) \right) \end{aligned}$$

L'ensemble $\{x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$ est bien mesurable puisque f_n et f_m sont mesurables. Il reste encore un problème, on a seulement le droit de faire des unions et intersections dénombrables

d'ensemble mesurables : on ne peut pas faire l'intersection pour tous les $\varepsilon > 0$, mais on peut prendre une suite ε_k qui converge vers 0. Plus précisément:

$$(f_n(x)) \text{ converge} \iff x \in \bigcap_{k>0} \left(\bigcup_{N \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n, m \geq N} \left\{ x \in E, |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2^k} \right\} \right) \right).$$

On rappelle qu'on a vu une autre méthode en TD, utilisant les \limsup et \liminf .

- b) Il suffit de montrer que $f^{-1}(F)$ est mesurable pour tout fermé F (cf la remarque des petites questions). On rappelle que la distance à un fermé est une application 1-lipschitzienne (c'est-à-dire que $x \rightarrow d(x, F)$ est 1-lipschitzienne) et que $x \in F$ ssi $d(x, F) = 0$. On écrit alors:

$$\begin{aligned} f^{-1}(F) &= \{x \in X; d(f(x), F) = 0\} = \left\{ x \in X; \lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), F) = 0 \right\} \\ &= \bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq N} \left\{ x \in X; d(f_n(x), F) \leq \frac{1}{p} \right\}, \end{aligned}$$

qui est mesurable comme unions et intersections dénombrables d'ensembles mesurables. En effet, $x \rightarrow d(f_n(x), F)$ est mesurable, étant la composée de la fonction mesurable f_n par la fonction 1-lipschitzienne $y \rightarrow d(y, F)$ (donc continue, donc mesurable).

ATTENTION: Il ne suffit pas de montrer que les images réciproques des boules (ouvertes ou fermées) sont mesurables. En effet, ce n'est que dans un espace métrique **séparable** qu'on peut affirmer que la tribu engendrée par les boules est la tribu borélienne.

Exercice 3. Soient (X, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré et $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable.

- a) Montrer que si $\mu(X) \neq 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et f soit bornée sur A .
 b) Montrer que si $\mu(\{f \neq 0\}) \neq 0$, alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) > 0$ et $|f|$ soit minorée sur A par une constante strictement positive.

Corrigé:

- a) Soit $A_n = \{|f| \leq n\}$ (de manière plus formelle, $A_n = \{x; |f(x)| \leq n\}$), qui est mesurable. Il est clair que A_n est une suite croissante d'ensembles et que $\bigcup_{n \geq 1} A_n = X$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \mu(X) > 0.$$

Il existe donc $n \geq 1$ tel que $\mu(A_n) > 0$, ce qui conclut.

- b) Soit $A_n = \{|f| \geq 1/n\}$ (de manière plus formelle, $A_n = \{x; |f(x)| \geq 1/n\}$), qui est mesurable. Il est clair que A_n est une suite croissante d'ensembles et que $\bigcup_{n \geq 1} A_n = \{f \neq 0\}$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n \right) = \mu(\{f \neq 0\}) > 0.$$

Il existe donc $n \geq 1$ tel que $\mu(A_n) > 0$, ce qui conclut.

Exercice 4 (Théorème d'Egoroff). Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions réelles mesurables sur E et f une fonction réelle mesurable sur E telles que $f_n \rightarrow f$ μ -p.p. quand $n \rightarrow \infty$.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $\eta > 0$ il existe $n \geq 1$ tel que

$$\mu \left(\bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) \leq \eta.$$

2. En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) \leq \varepsilon$ tel que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $E \setminus A$.

3. Donner un contre-exemple à ce résultat si l'on suppose que $\mu(E) = \infty$.

Corrigé:

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ converge μ -p.p. vers f ce qui implique que pour tout $k \geq 1$,

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0.$$

Pour tout $k \geq 1$, la suite $(\bigcup_{j \geq n} \{x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k}\})_{n \geq 0}$ est décroissante pour l'inclusion et $\mu(E) < \infty$ donc

$$\mu \left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right).$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{j \geq n} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) = 0,$$

et l'on obtient le résultat.

2. Fixons $\varepsilon > 0$. D'après la question (1), pour tout $k \geq 1$, on peut trouver $n_k \geq 0$ tel que

$$\mu \left(\bigcup_{j \geq n_k} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\} \right) \leq 2^{-k} \varepsilon.$$

Posons

$$A = \bigcup_{k \geq 1} \bigcup_{j \geq n_k} \left\{ x \in E : |f_j(x) - f(x)| > \frac{1}{k} \right\}.$$

Alors $\mu(A) \leq \varepsilon$ et sur $E \setminus A$, $f_n \rightarrow f$ uniformément quand $n \rightarrow \infty$.

3. On se place sur $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$. Considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1} = (\mathbb{1}_{[-n, n]})_{n \geq 1}$. Alors $(f_n)_{n \geq 1}$ converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ de mesure finie tel que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge sur B uniformément vers $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Alors $\lambda(\mathbb{R} \setminus B) = +\infty$, ce qui implique que $\mathbb{R} \setminus B$ contient des réels arbitrairement grands en valeur absolue et donc qu'on ne peut pas avoir convergence uniforme sur $\mathbb{R} \setminus B$. Le théorème d'Egoroff ne peut donc pas être démontré si l'on ne suppose pas $\mu(E) < \infty$.

Exercice 5 (Tribu réciproque). Soit $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une application mesurable.

1. Montrer que $\mathcal{A}_f = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ est une tribu. On l'appelle **tribu engendrée par f** .
2. Montrer que c'est la plus petite tribu sur E qui rende f mesurable.
3. Montrer que toute fonction $g : E \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable pour \mathcal{A}_f , s'écrit $g = h \circ f$ avec $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

INDICATION: commencer par le cas où g est étagée.

4. (EXEMPLE.) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ définie par $f(x) = x^2$.

- (a) Montrer que la tribu image-réciproque par f est $\mathcal{A}_f := \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), A = -A\}$.
- (b) Déterminer l'ensemble des fonctions mesurables de $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_f)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Corrigé:

1. Il s'agit d'une simple vérification des trois points de la définition d'une tribu.
2. Il est clair que \mathcal{A}_f rend f mesurable (car pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a bien $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}_f$). D'autre part, toute tribu rendant f mesurable contient \mathcal{A}_f , car elle doit contenir les ensembles de la forme $f^{-1}(B)$ pour $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Le résultat s'ensuit.
3. Soit $g : (E, \mathcal{A}_f) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable et étagée,

$$g = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{A_i},$$

avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \mathcal{A}_f$. Comme A_i appartient à la tribu réciproque de f , il existe $B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ tel que $A_i = f^{-1}(B_i)$. Et donc

$$g = \underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{1}_{B_i}}_{\text{mesurable } (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))} \circ f.$$

Traitons maintenant le cas général : g s'écrit comme limite simple de fonctions étagées $g = \lim e_n$. Donc si l'on écrit $e_n = h_n \circ f$ on obtient $g = \lim h_n \circ f$ avec $h_n : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Si l'on pose

$$h(x) = \begin{cases} \lim h_n(x) & \text{quand la limite existe,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que h est mesurable et que $g = h \circ f$.

- (a) Ceci provient aisément du fait que $f^{-1}(A) = \sqrt{A \cap \mathbb{R}_+} \cup (-\sqrt{A \cap \mathbb{R}_+})$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.
- (b) D'après la question 3. ce sont les fonctions de la forme $f(x^2)$ avec $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable.

Exercice 6. Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré avec μ non nulle et $f : (E, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A) > 0$ tel que pour tous $x, y \in A$,

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Corrigé: Pour tout $r \in \mathbb{R}$, on note $A_r = f^{-1}(]r - \varepsilon/2, r + \varepsilon/2[)$. La fonction f étant mesurable, chaque ensemble A_r est mesurable. De plus,

$$\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r = f^{-1}(\mathbb{R}) = E.$$

Supposons que $\mu(A_r) = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Alors

$$\mu(E) = \sum_{r \in \mathbb{Q}} \mu(A_r) = 0.$$

Or $\mu(E) > 0$. Donc il existe $r_0 \in \mathbb{Q}$ tel que $\mu(A_{r_0}) > 0$. De plus $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour tous $x, y \in A_{r_0}$.

Exercice 7. Soit $C = C([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, muni de la topologie de la convergence uniforme. On note \mathcal{C}_1 la tribu borélienne de C et \mathcal{C}_2 la plus petite tribu de C rendant les applications de "projection" $f \mapsto f(x)$ mesurables pour tout x . Comparer les tribus \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Corrigé: L'ensemble C est muni de la topologie de la convergence uniforme. Ainsi, pour tout $x \in [0, 1]$, l'application $f \in C \mapsto f(x) \in \mathbb{R}$ est continue et donc mesurable par rapport à la tribu \mathcal{C}_1 . On en déduit l'inclusion $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$. Montrons réciproquement que $\mathcal{C}_1 \subset \mathcal{C}_2$. Soit une fonction $f_0 \in C$ fixée. Pour tout $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, l'application $f \in C \mapsto |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{C}_2 . Donc l'application $f \in C \mapsto \sup_{x \in \mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$ est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{C}_2 car c'est un sup dénombrable de fonctions mesurables. Or $\|f - f_0\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{Q}} |f(x) - f_0(x)|$. Ainsi la fonction $f \in C \mapsto \|f - f_0\|_\infty$ est mesurable par rapport à la tribu \mathcal{C}_2 ce qui implique que toutes les boules ouvertes de C sont mesurables par rapport à \mathcal{C}_2 . L'espace C étant séparable, tous les ouverts de C sont donc mesurables par rapport à \mathcal{C}_2 .

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 8 (Exemples et contre-exemples). Répondre aux questions suivantes, si la réponse est positive donner une démonstration, si la réponse est négative donner un contre-exemple. On munit \mathbb{R} de la mesure de Lebesgue :

1. Un ouvert de \mathbb{R} de mesure finie est-il borné ?
2. Un borélien de mesure strictement positive est-il d'intérieur non vide ?
3. Un ouvert dense de $[0, 1]$ a-t-il une mesure 1 ?
4. Deux compacts homéomorphes ont-ils même mesure ? L'un peut-il être de mesure nulle et l'autre de mesure positive ?
5. (★) Existe-t-il un borélien A de \mathbb{R} tel que pour tout intervalle ouvert borné non vide I , on ait les inégalités strictes $0 < \lambda(A \cap I) < \lambda(I)$?

Corrigé:

1. Non, par exemple $O = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n - 1/2^n, n + 1/2^n[$.
2. Non, l'ensemble $[0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ est de mesure 1 et est d'intérieur vide.
3. Non, cf TD précédent: si on numérote $(q_n)_{n \geq 1}$ tous les rationnels de $[0, 1]$, et qu'on construit

$$A_\varepsilon = \bigcup_n]q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}[$$

on obtient un ouvert de mesure inférieure à 2ε et dense (puisque'il contient tous les rationnels).

4. Non (facile). Oui, les espaces de Cantor sont tous homéomorphes, et certains sont de mesure nulle, d'autres non (voir TD1).
5. Oui, mais il n'est pas facile à construire : il faut prendre un ensemble de Cantor de mesure non nulle, puis dans chaque trou glisser un ensemble de Cantor plus petit, etc.

Exercice 9. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on note $N(y) \in \overline{\mathbb{R}}$ le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$. Montrer que N est une fonction mesurable.

Corrigé: L'équation $f(x) = y$ possède une solution dans $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ si

$$y \in f([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[).$$

Puisque f est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique que $f([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[$ est un intervalle et est donc mesurable. Ainsi la suite de fonctions

$$N_n = \sum_{k=0}^{2^n-1} \mathbf{1}_{y \in f([k2^{-n}, (k+1)2^{-n}[)} + \mathbf{1}_{y=f(1)},$$

est mesurable et tend en croissant vers N qui est donc mesurable.

Exercice 10 (★). Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable telle que $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que f est linéaire.

ON POURRA ADMETTRE LE RÉSULTAT SUIVANT (théorème de Lusin, prouvé ultérieurement): si une fonction $g : ([a, b], \mathcal{B}([a, b])) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un compact $K_\epsilon \subset [a, b]$ tel que $\mu([a, b] \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$ et la restriction de g à K est continue.

Corrigé: Il est clair que $f(0) = 0$. Il suffit de prouver que f est continue en 0 (f sera alors continue sur tout \mathbb{R} et donc linéaire). Soit $\epsilon > 0$. D'après le théorème de Lusin, il existe un compact $K \subset [0, 1]$ tel que $\mu(K) > 2/3$ et sur lequel f est continue. Puisque f est alors uniformément continue sur K , il existe $\delta \in (0, 1/3)$ tel que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ dès que $|x - y| \leq \delta$. Soit $h \in (0, \delta)$. Alors les ensembles K et $K - h = \{x - h; x \in K\}$ ne sont pas disjoints. En effet, dans le cas contraire, on aurait:

$$1 + h = \mu([-h, 1]) \geq \mu(K \cup (K - h)) = \mu(K) + \mu(K - h) > 4/3,$$

ce qui contredit le fait que $h < \delta < 1/3$. Il existe donc $x_0 \in K \cap (K - h)$, ce qui implique que $|f(x_0) - f(x_0 + h)| < \epsilon$, et donc $|f(h)| < \epsilon$.

Fin