Intégration et probabilités

TD1 – Espaces mesurés – Corrigé

2012-2013

1 – Petites questions

1) Est-ce que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ est une tribu ?

Réponse : Non, car le complémentaire de $]-\infty, 0[$ n'est pas ouvert.

2) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux tribus, est-ce que $\mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ est toujours une tribu ?

Réponse : Non, pas toujours. Par exemple si, en notant $\Omega = \{1, 2, 3\}$, on prend $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}, \Omega\}$ et $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{2\}, \{1, 3\}, \Omega\}$? En effet, on a alors $\mathcal{F} \cup \mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$, qui n'est pas stable par union ($\{1\} \cup \{2\} \notin \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$).

3) Si on note λ la mesure de Lebesgue, on sait que $\lambda(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc :

$$\lambda(\mathbb{R}) = \lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\}) = \sum_{x\in\mathbb{R}} 0 = 0.$$

o_O ! Où est le problème ? ?

Réponse : L'égalité $\lambda\left(\bigcup_{x\in\mathbb{R}}\{x\}\right) = \sum_{x\in\mathbb{R}} \lambda(\{x\})$ n'est pas vérifiée car $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

2 – Tribus, mesures

Exercice 1 (Préliminaires)**.** Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de réels. On définit les deux nombres suivants dans $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\geqslant n} a_k\right) \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\geqslant n} a_k\right).$$

1. Vérifier que ces deux définitions ont bien un sens.
2. Vérifier les assertions suivantes :
   - $\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \Rightarrow \exists n \geqslant 0, \forall k \geqslant n, a_k < \alpha$.
   - $\exists n \geqslant 0, \forall k \geqslant n, a_k < \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \leqslant \alpha$.
   - $\limsup_{n\to\infty} a_n > \alpha \Rightarrow \forall n \geqslant 0, \exists k \geqslant n, a_k > \alpha$.
   - $\forall n \geqslant 0, \exists k \geqslant n, a_k > \alpha \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} a_n \geqslant \alpha$.

   Écrire des assertions similaires faisant intervenir $\liminf_{n\to\infty} a_n$.
3. Vérifier que a_n converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Corrigé :

1. La suite de terme général $\sup_{k\geqslant n} a_k$ est décroissante, donc elle a bien une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. De même pour la $\liminf$ et la limite croissante.
2. Vérifions la première assertion :

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} a_n < \alpha \quad &\Rightarrow \quad \exists n \geqslant 0, \sup_{k\geqslant n} a_k < \alpha \\ &\Rightarrow \quad \exists n \geqslant 0, \forall k \geqslant n, a_k < \alpha.\end{aligned}$$

   Le reste des assertions se démontre de la même fac con.
3. On remarque tout d'abord que $\sup_{k\geqslant n} a_k \geqslant a_n \geqslant \inf_{k\geqslant n}$. La suite a_n est encadrée par une suite décroissante et une croissante et si $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$ alors par le principe des gendarmes la suite a_n converge vers l. Le cas $l = \pm\infty$ est similaire. Prouvons maintenant l'autre sens : si $\lim a_n = l \in \mathbb{R}$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe N tel que pour tout $n \geqslant N$, $a_n \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$. On a donc aussi pour tout $n \geqslant N$, $\sup_{k\geqslant n} a_k$, $\inf_{k\geqslant n} a_k \in [l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, et le résultat s'ensuit. Encore une fois, le cas infini se fait de la même manière.

Exercice 2 ($\liminf$ et $\limsup$ de suites d'ensembles mesurables).

1. On considère un ensemble E, et $(A_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de sous-ensembles de E. Si $A \subseteq E$, on note $\mathbb{1}_A$ sa fonction caractéristique ($\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\mathbb{1}_A(x) = 0$ sinon).

   (a) Que représentent les ensembles suivants,

$$\bigcup_{n\geqslant 1} \bigcap_{k\geqslant n} A_k\ , \quad \bigcap_{n\geqslant 1} \bigcup_{k\geqslant n} A_k\ ?$$

   Le premier est noté $\liminf_{n\to\infty} A_n$, le second $\limsup_{n\to\infty} A_n$. Relier les fonctions caractéristiques $\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}$, $\mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}$ aux fonctions $\mathbb{1}_{A_n}$, $n \geqslant 1$.

   (b) Calculer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ lorsque $A_n = [\sin(n) - 1, \sin(n) + 1]$.

   On suppose dans les questions (b) et (c) que $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré (μ est une mesure positive) et que $(A_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$.

   (c) Montrer que

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n)\ ,$$

   et que si $\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) < \infty$, alors

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n)\ .$$

   Qu'est-ce qui se passe si $\mu(\cup_{n\geqslant 1} A_n) = \infty$?

   (d) (Lemme de Borel-Cantelli.) On suppose que $\sum_{n\geqslant 1} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0.$$

2. (Une application du lemme de Borel-Cantelli.) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour presque-tout $x \in [0,1]$ (pour la mesure de Lebesgue), il n'existe qu'un nombre fini de rationnels p/q avec p et q premiers entre eux tels que
$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$
i.e. presque tout x est "mal approchable par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$".

Corrigé :

1. L'ensemble $\liminf_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à tous les A_n à partir d'un certain rang et l'ensemble $\limsup_{n\to\infty} A_n$ est l'ensemble des éléments qui appartiennent à une infinité de A_n. On a l'égalité
$$\mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n} = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}. \tag{1}$$
En effet,
$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to\infty} A_n &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ x \in A_n, \forall n \geqslant n_0, \\ &\Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \inf_{n \geqslant n_0} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1, \\ &\Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(x) = 1. \end{aligned}$$
L'égalité
$$\mathbb{1}_{\limsup_n A_n} = \limsup_n \mathbb{1}_{A_n}$$
se démontre de façon similaire à (**??**) ou en passant au complémentaire dans (**??**) en remarquant que
$$\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right)^c = \liminf_{n\to\infty} (A_n)^c.$$

2. On a $\limsup A_n =]-2,2[$ et $\liminf A_n = \{0\}$. En effet, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans $]-1,1[$ (pour le voir, utiliser par exemple le fait que le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$ n'est pas monogène car π est irrationel, donc dense dans $\mathbb{R}$), donc pour tout $0 < x < 2$, il existe une infinité d'entiers n tels que $\sin(n) > x - 1$ et aussi une infinité de n tels que $\sin(n) < x - 1$. La première famille montre que $x \in \limsup A_n$ et la deuxième famille que $x \notin \liminf A_n$. Il est ensuite facile de vérifier que $\pm 2 \notin \limsup A_n$ (car π est irrationnel) et $0 \in \liminf A_n$.

3. On remarque que, pour tout $n \geqslant 0$ et pour tout $k \geqslant n$,
$$\mu\left(\bigcap_{p \geqslant n} A_p\right) \leqslant \mu(A_k).$$
Ainsi,
$$\mu\left(\bigcap_{k \geqslant n} A_k\right) \leqslant \inf_{k \geqslant n} \mu(A_k). \tag{2}$$
Or la suite $(\cap_{k \geqslant n} A_k)_{n \geqslant 0}$ est croissante. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (**??**). De même, on a
$$\mu\left(\bigcup_{k \geqslant n} A_k\right) \geqslant \sup_{k \geqslant n} \mu(A_k). \tag{3}$$

Or la suite $(\cup_{k\geqslant n}A_k)_{n\geqslant 0}$ est décroissante et $\mu(\cup_{n\geqslant 0}A_n) < +\infty$. Le résultat s'obtient donc en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans (**??**). On peut aussi utiliser le résultat précédent et raisonner en passant au complémentaire. En effet, posons $F = \cup_{n\geqslant 0}A_n$. On a alors

$$F \setminus \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty}(F \setminus A_n).$$

Donc,

$$\mu\left(F \setminus \limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mu(F \setminus A_n),$$

c'est-à-dire,

$$\mu(F) - \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leqslant \mu(F) - \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Comme $\mu(F) < \infty$, cela implique le résultat.

4. On a, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mu\left(\bigcup_{k\geqslant n} A_k\right) \leqslant \sum_{k\geqslant n} \mu(A_k).$$

Or $\mu(\limsup_{k\to\infty} A_k) \leqslant \mu(\cup_{k\geqslant n}A_k)$ pour tout $n \geqslant 0$ et $\sum_{k\geqslant n}\mu(A_k)$ est le reste d'une série convergente et donc tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On obtient ainsi le résultat.

5. Pour tout $q \geqslant 1$, on note

$$A_q = [0,1] \cap \bigcup_{p=0}^{q} \left[\frac{p}{q} - \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}\right].$$

Ainsi, $\lambda(A_q) \leqslant 2/q^{1+\varepsilon}$. Par conséquent,

$$\sum_{q\geqslant 1} \lambda(A_q) < +\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli, $\lambda(\limsup_{q\to\infty} A_q) = 0$, or l'ensemble $\limsup_{q\to\infty} A_q$ contient l'ensemble des réels bien approchables par des rationnels à l'ordre $2+\varepsilon$. Voir

`http://en.wikipedia.org/wiki/Thue-Siegel-Roth_theorem`

Exercice 3 (Opérations sur les tribus).

– Soit $\mathcal{F}$ une tribu de Ω et B un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}_B := \{A \cap B, A \in \mathcal{F}\}$ est une tribu de B.
– Soit $(X \times Y, \mathcal{F})$ un espace-produit mesuré et $\pi : X \times Y \longrightarrow X$ la projection canonique. L'ensemble $\mathcal{F}_X := \{\pi(F), F \in \mathcal{F}\}$ est-il une tribu ?
– On considère sur $\mathbb{N}$, pour chaque $n \geqslant 0$, la tribu $\mathcal{F}_n = \sigma(\{0\},\{1\},\ldots,\{n\})$. Montrer que la suite de tribus $(\mathcal{F}_n, n \geqslant 0)$ est croissante mais que $\bigcup_{n\geqslant 0}\mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.
– (Partiel 2010) Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de E, et soit $B \in \sigma(\mathcal{C})$. Michel dit : alors nécessairement, il existe une famille dénombrable $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ telle que $B \in \sigma(\mathcal{D})$. A-t-il raison ?

Corrigé :

1. – $B = \Omega \cap B \in \mathcal{F}_B$,
   – Soit $C = B \cap D \in \mathcal{F}_B$ avec $D \in \mathcal{F}$. Alors $D^c \in \mathcal{F}$ et $C_B^c = B \cap D^c$ appartient à $\mathcal{F}_B$.

– Soit $C_n = B \cap D_n \in \mathcal{F}_B$ avec $D_n \in \mathcal{F}$. Alors $\bigcup_n D_n \in \mathcal{F}$ et $\bigcup_n B_n = B \cap \bigcup_n D_n$ appartient à $\mathcal{F}_B$. L'ensemble $\mathcal{F}_B$ est donc bien une tribu sur B.

2. On considère pour $X = Y = \{0, 1\}$ la tribu $\mathcal{F}$ engendré par l'élément $(0, 0) \in X \times Y$. Il est clair que

$$\mathcal{F} = \{\varnothing, X \times Y, \{(0, 0)\}, X \times Y \backslash \{(0, 0)\}\}.$$

On vérifie que $\mathcal{F}_X = \{\varnothing, \{0\}, X\}$, ce qui n'est pas une tribu.

3. Posons

$$\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n,$$

et supposons que $\mathcal{F}$ soit une tribu. On a

$$\{2n\} \in \mathcal{F}_{2n} \subset \mathcal{F} \quad \text{et} \quad 2\mathbb{N} = \bigcup_{n \geqslant 0} \{2n\}.$$

Ainsi, $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}$ i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $2\mathbb{N} \in \mathcal{F}_{n_0}$. Or, les seuls éléments de cardinal infini de $\mathcal{F}_{n_0}$ sont de la forme $\mathbb{N} \setminus A$, où A est une partie de $\{0, 1, \ldots, n_0\}$. On obtient donc une contradiction.

4. Michel a raison. En effet, soit $\mathcal{G} = \{B \in \sigma(\mathcal{C})\,;\, \exists \mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $B \in \sigma(\mathcal{D})\}$. Montrons que $\mathcal{G}$ est une tribu.

Il est clair que $E \in \mathcal{G}$. Si $A \in \mathcal{G}$, alors il existe $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A \in \sigma(\mathcal{D})$, et donc $A^c \in \sigma(\mathcal{D})$: on a $A^c \in \mathcal{G}$.

Si $(A_n) \subset \mathcal{G}$, alors pour tout n il existe $\mathcal{D}_n \subset \mathcal{C}$ dénombrable tel que $A_n \in \sigma(\mathcal{D}_n)$, et donc $\cup_n A_n \in \sigma(\mathcal{D})$, où $\mathcal{D} := \cup_n D_n \subset \mathcal{C}$ est dénombrable (étant une union dénombrable d'ensembles dénombrables) : on a $\cup_n A_n \in \mathcal{G}$.

En conclusion, $\mathcal{G}$ est une tribu, c'est-à-dire $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{C})$.

Exercice 4 (Mesure sur $\mathbb{Z}$)**.** Existe-t-il une mesure de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation ?

Corrigé : Oui, mais seulement la mesure nulle. En effet, soit μ une mesure non nulle de masse finie sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}))$ invariante par translation. Comme μ est non nulle, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $c := \mu(\{n\}) > 0$. Par invariance par translation, il vient $\mu(\{k\}) = c$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Mais alors, comme $\mathbb{Z}$ est dénombrable :

$$\mu(\mathbb{Z}) = \mu(\cup_{k \in Z}\{k\}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \mu(\{k\}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c = \infty,$$

ce qui contredit le fait que μ est de masse finie.

Exercice 5.

1. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe O_ϵ un ouvert dense de $\mathbb{R}$ de mesure (de Lebesgue)

$$\lambda(O_\epsilon) \leqslant \epsilon.$$

2. En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, il existe F_ϵ un fermé d'intérieur vide tel que pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\lambda(A \cap F_\epsilon) \geqslant \lambda(A) - \epsilon.$$

Corrigé :

1. Soit $\epsilon > 0$. Notons $\mathbb{Q} = \{q_n, n \geqslant 1\}$ les rationnels et posons :

$$O_\epsilon = \bigcup_{n\geqslant 1} \left]q_n - \epsilon 2^{-n-1}, q_n + \epsilon 2^{-n-1}\right[.$$

   Alors O_ϵ est un ouvert dense de $\mathbb{R}$. De plus,

$$\lambda(O_\epsilon) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda\left(\left]q_n - \epsilon 2^{-n-1}, q_n + \epsilon 2^{-n-1}\right[\right) = \sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\epsilon < \epsilon.$$

2. Posons $F_\epsilon = O_\epsilon^c$. Alors F_ϵ est un fermé de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide. De plus, pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, on a

$$\lambda(A) = \lambda(A \cap F_\epsilon) + \lambda(A \cap O_\epsilon) \leqslant \lambda(A \cap F_\epsilon) \leqslant \lambda(A \cap F_\epsilon) + \epsilon.$$

Exercice 6 (Ensembles de Cantor)**.**
Soit $(d_n, n \geqslant 0)$ une suite d'éléments de $]0,1[$, et soit $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geqslant 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré au centre de chaque intervalle, de longueur d_n fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geqslant 0} K_n$.

1. Montrer que K est un compact non dénombrable d'intérieur vide dont tous les points sont d'accumulation.
2. Calculer la mesure de Lebesgue de K.
3. On note K_3 l'ensemble de Cantor obtenu en posant $d_n = \frac{1}{3}$ pour tout n. Vérifier que

$$K_3 = \left\{ \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{3^n} \; ; \; (a_n) \in \{0,2\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

   et qu'il est mesure de Lebesgue nulle.

Corrigé :

1. Chaque ensemble K_n est fermé donc K est fermé. De plus, $K \subset [0,1]$ donc K est compact. Montrons que l'on peut construire une bijection $\varphi : K \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Si x est dans K, alors x est dans un des deux intervalles composant K_1. On pose $\varphi(x)_0 = 0$ si x est dans l'intervalle de gauche et $\varphi(x)_0 = 1$ si x est dans l'intervalle de droite. En répétant ce procédé, on construit une suite $\varphi(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que φ est une bijection. Ainsi, K n'est pas dénombrable. Par construction de φ, pour tous $x, y \in K$ et $n \geqslant 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_{n+1} si et seulement si $\varphi(x)_k = \varphi(y)_k$ pour tout $k \leqslant n$. Supposons qu'il existe un intervalle I de $[0,1]$ inclus dans K et non réduit à un point. Soient $x, y \in I$ tels que $x \neq y$. Alors, pour tout $n \geqslant 0$, x et y sont dans le même intervalle composant K_n donc $\varphi(x) = \varphi(y)$ ce qui est absurde. Ainsi, K est d'intérieur vide. Enfin, soit $x \in K$. L'ensemble $\{y \in K : \varphi(y)_k = \varphi(x)_k \ \forall k \leqslant n\}$ est infini et est constitué de points de K tous à distance au plus $1/2^{n+1}$ de x. Donc x est un point d'accumulation.
2. On montre par récurrence que $\lambda(K_n) = (1-d_0)\dots(1-d_{n-1})$. Or $\lambda([0,1]) = 1$ donc $\lambda(K) = \lim_{n\to\infty} \lambda(K_n)$. On a donc :

$$\sum_{n\geqslant 0} d_n < \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda(K) = \prod_{n\geqslant 0}(1-d_n),$$
$$\sum_{n\geqslant 0} d_n = \infty \quad \Rightarrow \quad \lambda(K) = 0.$$

3. Il suffit de regarder la bijection construite dans la question 1 entre K et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et vérifier que si $x = \varphi((b_n)_n)$, alors $x = \sum \frac{2b_n}{3^n}$. Pour la mesure on utilise la question 2.

Exercice 7. Prouver que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Corrigé :

Montrons tout d'abord que $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Pour tous ouverts O, O' de $\mathbb{R}$, $O \times O'$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et donc $O \times O' \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. On en tire que $\mathcal{F} \times \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ pour $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, et donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. En effet, rappelons que par définition :

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma\left(\mathcal{F} \times \mathcal{G}; \mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right).$$

Réciproquement, montrons que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$. À cet effet, on aura besoin du lemme suivant, qui dit que $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ est à base dénombrable d'ouverts (voir le cours de topologie pour une preuve) :

Lemme. Si $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ désigne l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}^2$, on a :

$$\mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right) = \left\{ \bigcup_{i \in I} U_i \times V_i;\ U_i, V_i \text{ ouverts de } \mathbb{R}, I \text{ dénombrable.} \right\}$$

Finissons maintenant l'exercice. D'après le lemme, comme $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^2\right) = \sigma\left(\mathcal{O}\left(\mathbb{R}^2\right)\right)$, il suffit de montrer que si I est dénombrable et U_i, V_i $(i \in \mathbb{R})$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$, alors

$$\bigcup_{i \in I} U_i \times V_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Ceci est clairement le cas, car $U_i, V_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et I est **dénombrable**.

Remarque. Cette preuve montre que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ lorsque X et Y sont deux espaces métriques à base dénombrable d'ouverts (ou, de manière équivalente, s'ils sont séparables).

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 8 ("Cardinal" d'une tribu)**.** Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu $\mathcal{A}$ infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit, pour tout $x \in E$, l'atome de la tribu $\mathcal{A}$ engendré par x par,

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{A} : x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{A}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{A}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{A}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{A}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Donner une nouvelle démonstration de la dernière question de l'exercice 4.

Corrigé :

1. On remarque que $x \in \dot{x}$ pour tout $x \in E$, donc
$$\bigcup_{x \in E} \dot{x} = E.$$
Montrons maintenant que
$$\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = \dot{y}.$$
Soient $x, y, z \in E$ tels que $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$. Alors chaque ensemble $A \in \mathcal{A}$ contenant x contient z. Supposons qu'il existe $B \in \mathcal{A}$ contenant z mais ne contenant pas x. Alors $B^c \in \mathcal{A}$ et contient x. Ainsi B^c contient z ce qui est contradictoire. Donc $\dot{x} = \dot{z}$ et de même $\dot{y} = \dot{z}$. Donc $\dot{x} = \dot{y}$.
2. Supposons que $\mathcal{A}$ soit finie ou dénombrable. Alors chaque atome $\dot{x}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ et donc appartient à $\mathcal{A}$. De plus, si $A \in \mathcal{A}$, alors
$$A = \bigcup_{x : x \in A} \dot{x}$$
et cette réunion est au plus dénombrable car les atomes appartiennent à $\mathcal{A}$. De plus, les atomes formant une partition de E, cette écriture est unique.
3. Soit $\mathcal{B}$ l'ensemble des atomes de $\mathcal{A}$ supposée finie ou dénombrable. D'après la question 2., on définit une bijection φ de $\mathcal{P}(\mathcal{B})$ dans $\mathcal{A}$ par,
$$\varphi : B \in \mathcal{P}(\mathcal{B}) \longmapsto \bigcup_{\dot{x} \in B} \dot{x}.$$
Si $\mathcal{B}$ est fini, alors $\mathcal{A}$ est finie. Sinon, $\mathcal{A}$ ne peut pas être dénombrable.
4. Les tribus $\mathcal{F}_n$ sont toutes finies donc $\bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$ est infinie dénombrable. D'après la question précédente, il n'existe pas de tribu infinie dénombrable, donc $\bigcup_{n \geqslant 0} \mathcal{F}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 9 (Support)**.** Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On pose
$$S := \{x \in \mathbb{R}^n, \mu(B(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$
Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S. (On appelle S le support de la mesure μ.)

Corrigé : Soit $x \notin S$, alors par définition il existe un $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$, *a fortiori* pour tout z contenu dans la boule ouverte de centre x et de rayon r_x
$$B(z, r_x - |z - x|) \subset B(x, r_x) \text{ et donc } \mu(B(z, r_x - |z - x|)) = 0,$$
ce qui démontre que $B(x, r_x)$ est incluse dans S^c. L'ensemble F est donc fermé.
On sait que pour tout $x \notin S$, il existe $r_x > 0$ tel que $\mu(B(x, r_x)) = 0$. Si K est un compact inclu dans S^c il existe un recouvrement ouvert
$$K \subset \bigcup_{x \in K} B(x, r_x),$$
duquel on peut extraire un recouvrement fini (Borel-Lebesgue). De plus S^c peut être vu comme une réunion dénombrable de compacts, par exemple
$$S^c = \bigcup_{n,k} \left\{ x : d(x, F) \geqslant \frac{1}{k}, |x| \leqslant n \right\},$$

ainsi S^c est une union dénombrable de boules ouvertes $S^c = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} B(x_i, r_{x_i})$ et

$$\mu(S^c) \leqslant \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(B(x_i, r_{x_i})) = \sum 0 = 0.$$

Si F est un fermé contenu dans S alors

$$\mathbb{R}^n \backslash F = \mathbb{R}^n \backslash S \sqcup S \backslash F,$$

et chacun de ces ensembles est mesurable, le résultat s'obtient en prenant la mesure de l'égalité.

Exercice 10 ($\star$ – Mesure atomique)**.** Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $A \in \mathcal{F}$ est un atome pour μ si $0 < \mu(A) < \infty$ et pour tout $B \subset A$ mesurable, $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(X) = 1$ et tel que μ n'ait pas d'atomes. Montrer que l'image de μ est $[0, 1]$ (c'est-à-dire que pour tout $t \in [0, 1]$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) = t$).

Corrigé : Il s'agit d'un très bel exercice à zornette, voir
`http://www.math.osu.edu/~leibman.1/6211/zorn.pdf`

Exercice 11 (Un problème d'additivité)**.**
On note $l^\infty = \{\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \|\mathbf{a}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n < \infty\}$, l'ensemble des suites réelles bornées.

1. Montrer que $(l^\infty, \|.\|_\infty)$ est un espace vectoriel normé complet.
   On admet (théorème de Hahn-Banach) qu'il existe une forme linéaire $F : l^\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ continue qui satisfait les deux propriétés suivantes : Soit $\mathbf{a} = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty$
   - $F(\mathbf{a}) \leqslant \|\mathbf{a}\|_\infty$,
   - Si $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ existe alors $F(\mathbf{a}) = \alpha$.
2. Soit $A \subset \mathbb{N}$ et $\mathbf{1}_A \in l^\infty$ définie par $\begin{cases} \mathbf{1}_A(n) = 1, \text{ si } n \in A, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$. Si $P(A) = F(\mathbf{1}_A)$, montrer que
   - $P(\varnothing) = 0, P(\mathbb{N}) = 1$,
   - $P(A^c) = 1 - P(A)$,
   - $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ si $A \cap B = \varnothing$.
3. Montrer que P n'est pas une mesure.

Corrigé : Pour la première question, voir le cours de topologie. Pour la deuxième question, exo :-). Pour la troisième question, il suffit de voir que :

$$1 = P(\mathbb{N}) = P\left(\bigcup_{i\geqslant 0}\{i\}\right) \neq \sum_{i\geqslant 0} P(\{i\}) = \sum_{i\geqslant 0} 0 = 0.$$

Exercice 12 ($\star$)**.** Est-ce que $\mathcal{B}(X \times Y) = \mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y)$ pour tous espaces métriques X, Y ?

Corrigé : la réponse est non. Prenons $X = Y = (l^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, c'est-à-dire l'espace métrique des suites bornées indexées par $\mathbb{R}$ muni de la norme infinie.

Lemme. Soit U un ensemble mesurable de $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(X)$. Alors il existe des ensembles mesurables $(A_i, B_i)_{i\in\mathbb{R}}$ tels que

$$U = \bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i \times B_i.$$

Démonstration. D'après la dernière question de l'exercice 3, il existe une suite $(A_m)_{m\geqslant 0}$ d'ensembles mesurables tels que $U \in \sigma\big((A_m \times A_n)_{m,n\geqslant 0}\big)$. En effet, on se rappelle qu'on a $\mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(X) = \sigma\left(A\times A';\ A, A' \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right)$. Maintenant, pour une suite $\underline{x} = (x_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, posons

$$B_{\underline{x}} = \bigcap_{n\geqslant 0} C_n,$$

où $C_n = A_n$ si $x_n = 1$ et $C_n = A_n^c$ si $x_n = 0$. Mais l'ensemble des élements qui s'écrivent comme union des ensembles de la forme $B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x'}}$ est une tribu (le vérifier ! !) contenant U (car il contient les $A_i \times A_j$). On en tire :

$$U = \bigcup \{B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x'}};\ B_{\underline{x}} \times B_{\underline{x'}} \subset U\}.$$

Ceci achève la preuve du lemme, car $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{R}$ sont en bijection. □

Revenons à la preuve de l'exercice. Il est clair que la diagonale $\Delta = \{(x,x)\,;\,x \in l^{\infty}(\mathbb{R})\} \in \mathcal{B}(X\times X)$. Supposons par l'absurde que $\Delta \in \mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(X)$. D'après le lemme, il existe une suite $(A_i, B_i)_{i\in\mathbb{R}}$ telle que

$$\Delta = \bigcup_{i\in\mathbb{R}} A_i \times B_i.$$

Comme $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ s'injecte dans l^{∞}, il existe $i \in \mathbb{R}$ et deux éléments distincts $(u,u)\,,(v,v) \in \Delta$ tels que $(u,u)\,,(v,v) \in A_i \times B_i$ (sinon, il existerait une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$).

Mais alors $(u,v) \in A_i \times B_i$, ce qui implique $(u,v) \in \Delta$. Absurde car $u \neq v$.

Remarque. Cette preuve montre que si X, Y sont deux espaces métriques dont le cardinal est strictement plus grand que celui de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{B}(X\times Y) \neq \mathcal{B}(X)\otimes\mathcal{B}(Y)$.

Fin