Exercices additionels : Radon–Nikodym et mesures – Corrigé

1 – Théorème de Radon–Nikodym

Exercice 1. **(Contre-Exemple à R-N)** Soit m la mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ c'est-à-dire que $m(A) = \#A$ pour toute partie A de $\mathbb{R}$. On note m_0 la restriction de m à la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que la mesure de Lebesgue est absolument continue par rapport à m_0.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ telle que $\lambda = f \cdot m_0$, où λ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Conclure quelque chose d'intelligent et intelligible.

Corrigé :

1. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ telle que $m_0(A) = 0$. Alors $A = \varnothing$ et donc $\lambda(A) = 0$.
2. Supposons qu'il existe une telle fonction f. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f\,dm_0 = f(x).$$
Ainsi $f = 0$ puis $\lambda = 0$. Contradiction.
3. La mesure μ_0 n'est pas σ-finie et le théorème de Radon-Nikodym ne s'applique pas.

□

Exercice 2. **(Quantification de l'absolue continuité)** Soient μ et ν deux mesures sur un espace mesurable $(E, \mathcal{A})$.

1. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{A}$,
$$\mu(A) \leq \eta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon.$$
Montrer que ν est absolument continue par rapport à μ.
2. Montrer que la réciproque est vraie dans le cas où la mesure ν est finie. Que se passe-t-il si ν est infinie ?

Corrigé :

1. Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\nu(A) \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $\nu(A) = 0$.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

2. On suppose que l'assertion n'est pas vérifiée. Soient $\varepsilon > 0$ et une suite $(A_n)_{n\geq 1}$ tels que, pour tout $n \geq 1$, $\mu(A_n) \leq 2^{-n}$ et $\nu(A_n) \geq \varepsilon$. Notons $B_n = \cup_{k\geq n} A_k$ pour tout $n \geq 1$ et $B = \cap_{n\geq 1} B_n$. Alors d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a $\mu(B) = 0$, puis $\nu(B) = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1$, on a $\nu(B_n) \geq \nu(A_n) \geq \varepsilon$. Et la suite $(B_n)_{n\geq 1}$ est décroissante pour l'inclusion. La mesure ν étant finie, on en déduit que

$$\nu(B) = \lim_{n\to\infty} \nu(B_n) \geq \varepsilon,$$

ce qui est contradictoire.

ATTENTION : on ne peut pas dire que μ a une densité par rapport à ν : les mesures n'étant pas nécessairement sigma-finies, on ne peut pas utiliser le théorème de Radon-Nikodym.

Lorsque $\nu = \infty$, il est facile de construire un contre-exemple (par exemple prendre μ et ν sur $\mathbb{R}$, μ absolument continue par rapport à ν avec une densité non intégrable, par exemple $x \to e^x$).

□

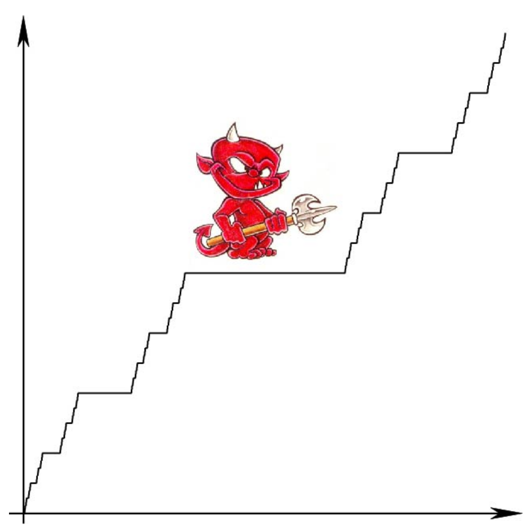
2 – Mesures

Exercice 3. **(Le retour du diable)** On construit récursivement une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions continues sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ comme suit. On pose $f_0(x) = x$ pour $x \in [0,1]$. On construit f_{n+1} à partir de f_n en remplaçant f_n, sur chaque intervalle maximal $[u,v]$ où elle n'est pas constante, par la fonction linéaire par morceaux qui vaut $(f_n(u)+f_n(v))/2$ sur $\left[\frac{2u}{3}+\frac{v}{3}, \frac{2v}{3}+\frac{u}{3}\right]$.

1. Verifier que $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$. En déduire que f_n converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue notée f_{diable}.
2. Soit μ_{diable} la mesure sur $[0,1]$ définie comme étant la mesure de Stieljes associée à f_{diable}. Montrer que μ_{diable} est étrangère par rapport à la mesure de Lebesgue. La mesure μ_{diable} a-t-elle des atomes ?

Corrigé :

1. On prouve aisément que $|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$ et $x \in [0,1]$ en utilisant la définition de f_n. Il s'ensuit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(f_{n+1} - f_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une fonction continue, et le résultat en découle. On appelle f l'escalier du diable (cf TD 4) :



2. Rappelons la construction de l'ensemble triadique de Cantor. On pose $K_0 = [0,1]$. On définit une suite $(K_n, n \geq 0)$ de la façon suivante : connaissant K_n, qui est une réunion d'intervalles fermés disjoints, on définit K_{n+1} en retirant dans chacun des intervalles de K_n un intervalle ouvert centré

au centre de chaque intervalle, de longueur 1/3 fois celle de l'intervalle. On pose $K = \bigcap_{n\geq 0} K_n$, appelé ensemble triadique de Cantor. Par construction, le support de la mesure μ_{diable} est l'ensemble de Cantor triadique, qui est de mesure de Lebesgue nulle (voir exercice 6 du TD 2). Ainsi μ_{diable} et la mesure de Lebesgue sont étrangères. Cependant, μ_{diable} n'a pas d'atomes, car la fonction croissante f_{diable} est continue.

□

Exercice 4. **(L'espace $\mathcal{M}(\mathbb{R})$)**

(i) Montrer que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ l'espace des mesures boréliennes signées sur $\mathbb{R}$ est un espace de Banach pour la norme

$$\mu \mapsto \|\mu\|,$$

où $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. Montrer que pour tout $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$:

$$\|f\|_1 = \|f \cdot \mu\|,$$

où $(f \cdot \mu)$ est la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

Corrigé :

(i) Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|$.

Étape 1 : pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ et $n, p \geq 1$, on a $|\mu_n(A) - \mu_p(A)| \leq \|\mu_n - \mu_p\|$, ce qui implique que la suite $(\mu_n(A))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et converge donc vers une limite notée $\mu(A)$.

Étape 2 : montrons que μ est une mesure. Prouvons tout d'abord que :

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)|; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} = 0. \tag{1}$$

À cet effet, soient $\epsilon > 0$ et $n_0 > 1$ tels que $\|\mu_n - \mu_k\| \leq \epsilon$ pour $n, k \geq n_0$. Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. On choisit $k > n_0$ tel que $|\mu(A) - \mu_k(A)| < \epsilon$. Alors pour $n > n_0$:

$$|\mu(A) - \mu_n(A)| \leq |\mu(A) - \mu_k(A)| + |\mu_k(A) - \mu_n(A)| \leq \epsilon + \|\mu_n - \mu_k\| \leq 2\epsilon,$$

ce qui prouve (1).

Ensuite, les mesures μ_n sont en particulier finiment additives, ce qui implique aisément que μ est finiment additive. Montrons maintenant que μ est σ-finie. Soient $(A_i)_{i\geq 1}$ des boréliens disjoints et $\epsilon > 0$. D'après (1), il existe $n_0 > 0$ tel que pour $n \geq n_0$:

$$\sup\{|\mu(A) - \mu_n(A)|; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\} \leq \epsilon.$$

On choisit ensuite $k_0 > 0$ tel que pour tout $k \geq k_0$:

$$\mu_n\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq \epsilon.$$

En particulier, ceci implique que pour $k \geq k_0$:

$$\mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq 2\epsilon.$$

Par additivité (finie) de μ, on obtient finalement pour tout $k \geq k_0$:

$$\left|\mu\left(\bigcup_{i\geq 1} A_i\right) - \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i)\right| = \mu\left(\bigcup_{i\geq k+1} A_i\right) \leq 2\epsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, la σ-additivité de μ en découle, ce qui prouve que μ est une mesure.

Étape 3 : on vérifie que $|\mu_n - \mu| \to 0$. Ceci découle immédiatement de (1) et de l'inégalité

$$\|\nu\| = \nu(X^+) + |\nu(X^-)| \leq 2 \sup\{|\nu(A)|; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$$

vérifiée pour une mesure signée ν sur $\mathbb{R}$ (où on a noté $X^{\pm}$ les supports de $\nu^{\pm}$).

(ii) Il suffit de remarquer que l'écriture $f \cdot \mu = f^+ \cdot \mu - f^- \cdot \mu$ est la décomposition de Hahn de $f \cdot \mu$, ce qui implique :

$$\|f \cdot \mu\| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \|f\|_1.$$

□

3 – Dualité $\mathbb{L}^p - \mathbb{L}^q$

On rappelle le résultat suivant, appelé *dualité* $\mathbb{L}^p - \mathbb{L}^q$. Soit ν une mesure σ-finie sur $(E, \mathcal{A})$, soit $p \in [1, \infty[$ et soit q l'exposant conjugé de p. Alors, si Φ est une forme linéaire continue sur $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \nu)$, il existe une unique application $g \in \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \nu)$ telle que pour tout $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \nu)$, $\Phi(f) = \int f g d\nu$. De plus la norme d'opérateur de Φ est $\|\Phi\| = \|g\|_q$.

Exercice 5. (**Séquentielle compacité faible**) Soit $p \in]1, \infty[$ et q son exposant conjugué, $\Omega \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et μ la mesure de Lebesgue. Soit (f_n) une suite bornée de $\mathbb{L}^p(\Omega)$ (*c-à-d* que la suite $(\|f_n\|_p)_{n\geq 1}$ est bornée).

1. Montrer que $\mathbb{L}^q(\Omega)$ est séparable (c'est à dire qu'il contient une partie dénombrable dense).
2. Soit D une partie dénombrable dense de $\mathbb{L}^q(\Omega)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})$ telle que pour tout $h \in D$,
$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} h d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
3. Montrer que pour tout $g \in \mathbb{L}^q(\Omega)$,
$$\phi(g) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu \text{ existe dans } \mathbb{R}.$$
4. En déduire qu'il existe $f \in \mathbb{L}^p(\Omega)$ telle que l'on ait *convergence faible* dans $\mathbb{L}^p(\Omega)$ de la suite $(f_{\varphi(n)})$ vers f, c'est-à-dire :
$$\forall g \in \mathbb{L}^q(\Omega), \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_{\varphi(n)} g d\mu = \int_\Omega f g d\mu.$$
5. Le résultat précédent subsiste-t-il pour $p = 1$?

Corrigé :

1. On sait déja que les fonctions en escalier sont denses dans $\mathbb{L}^q$, il suffit donc d'en trouver une sous famille dénombrable qui soit dense dans les fonctions en escalier. Par exemple, celles qui vérifient : "les intervalles $]x_i, x_{i+1}[$ sur lesquelles la fonction est constantes sont à bornes rationnelles, et les valeurs α_i de la fonction sur ces intervalles sont aussi rationnelles" constituent bien une famille dénombrable.

2. Il s'agit d'un simple procédé diagonal : on commence par numéroter tous les fonctions de D : $h_1, h_2, \ldots$. Considérons h_1, par Hölder, la suite $\left(\int f_n h_1 d\mu\right)_n$ est bornée par $\|h_1\|_q \sup_n \|f_n\|_p$, donc comme il s'agit d'une suite de réels, on peut trouver une extractrice ψ_1 telle que $\int f_{\psi_1(n)} h_1 d\mu$ converge. Ensuite en considérant la suite $\left(\int f_{\psi_1(n)} h_2 d\mu\right)_n$ on construit une extractrice ψ_2 telle que $\int f_{\psi_1 \circ \psi_2(n)} h_2 d\mu$ converge, et par récurrence on construit une suite d'extractrice $(\psi_k)_k$ qui vérifie que pour tout k

$$\int f_{\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k(n)} h_k d\mu \quad \text{converge quand } n \to \infty.$$

Si la famille (h_k) était finie, il suffirait de prendre $\psi_1 \circ \cdots \circ \psi_N$ et on aurait ce qu'il faut, mais avec une famille infinie il faut ruser. On définit $\varphi(n) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_n(n)$. Je laisse au lecteur le soin de vérifier que pour tout $n > k$, il existe $M \geq n$ tel que $\varphi(m) = \psi_1 \circ \cdots \circ \psi_k(M)$ et d'en déduire que $\int f_{\varphi(n)} h_k d\mu$ converge quand $n \to \infty$ pour tout k.

3. Le plus simple pour montrer que la suite $\int f_{\varphi(n)} g d\mu$ converge est de montrer qu'elle est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, et soit h une fonction de D qui vérifie $\|g - h\|_q < \varepsilon$. Soient $n, m \geq 0$,

$$\begin{aligned}\left|\int f_{\varphi(n)} g d\mu - \int f_{\varphi(m)} g d\mu\right| &< \left|\int f_{\varphi(n)}(g-h) d\mu\right| + \left|\int f_{\varphi(m)}(g-h) d\mu\right| \\ &\quad + \left|\int f_{\varphi(n)} h d\mu - \int f_{\varphi(m)} h d\mu\right|.\end{aligned}$$

Par Hölder les deux premiers termes sont inférieurs à $(\sup \|f_n\|_p)\varepsilon$ et comme la suite $\int f_{\varphi(n)} h d\mu$ converge (par la question précédente) elle est de Cauchy, donc il existe n_0 tel que si $n, m > n_0$,

$$\left|\int f_{\varphi(n)} g d\mu - \int f_{\varphi(m)} g d\mu\right| < (2 \sup \|f_n\|_p + 1)\varepsilon,$$

ce qui montre que la suite est de Cauchy.

4. À la question précédente on a définie une fonction de L^q dans $\mathbb{R}$:

$$\phi(g) = \lim_{n \to \infty} \int f_{\varphi(n)} g d\mu.$$

Ici on veut utiliser le théorème de dualité entre $\mathbb{L}^p$ et $\mathbb{L}^q$: si μ est σ-finie et $p < \infty$ alors il y a bijection entre $\mathbb{L}^q(\mu)$ et les formes linéaires continues sur $\mathbb{L}^p(\mu)$ et cette bijection est $f \mapsto \psi_f : g \mapsto \int f g d\mu$. Donc pour répondre à la question il suffit de montrer que ϕ est une forme linéaire continue. La linéarité est facile à montrer et la continuité découle de Hölder : $\phi(g) \leq (\sup \|f_n\|_p)\|g\|_q$. Et voila !

5. Non, le résultat n'est plus vrai pour $p = 1$: prenons la suite de fonction $f_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$ qui est bien bornée dans $\mathbb{L}^1$, et supposons qu'il existe une extractrice φ et une fonction $f \in \mathbb{L}^1$ telle que pour toute fonction $g \in \mathbb{L}^\infty$, $\lim \int f_{\varphi(n)} g d\mu = \int f g d\mu$. Regardons des fonctions particulières :
   - la fonctions $g = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$ montre que $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = 1$
   - la suite de fonction $g_k = \mathbb{1}_{[k,k+1]}$ montre que $\int_k^{k+1} f d\mu = 0$ pour tout k

   Ces deux résultats sont contradictoires, ce qui conclut la preuve par l'absurde.

□

Exercice 6. **(Petit contre-exemple)** Soient $E = \{a, b\}$ et μ la mesure définie sur $\mathcal{P}(E)$ par $\mu(\{a\}) = 1$ et $\mu(\{b\}) = \mu(E) = +\infty$. Caractériser $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et le dual topologique de $\mathbb{L}^1(\mu)$. Conclure.

Corrigé :

On a $\mathbb{L}^\infty = \{f : E \to \mathbb{R}\}$ et $\mathbb{L}^1 = \{f : E \to \mathbb{R} \mid f(b) = 0\}$. Donc le dual topologique de $\mathbb{L}^1$ est $(\mathbb{L}^1)' = \{f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \alpha f(a) : \alpha \in \mathbb{R}\}$. On voit ici que l'application $g \in \mathbb{L}^\infty \mapsto \Phi_g \in (\mathbb{L}^1)'$ (où $\Phi_g : f \in \mathbb{L}^1 \mapsto \int_E f g \, d\mu$) est surjective mais pas injective. La mesure μ n'est pas σ-finie et le théorème de dualité (avec $p = 1$ et $q = +\infty$) ne s'applique pas dans ce cas. □

4 – Pour préparer le partiel à venir

Chercher des exercices des partiels des années précédents (les énoncés sur disponibles sur le site d'enseignement du DMA – `http://www.math.ens.fr/enseignement` – partie **Archives pédagogiques**, puis **Annales d'examens**).

5 – Compléments (hors TD)

Exercice 7. (**Fonctions à variation finie**) Soit une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
   (i) f s'écrit comme une différence de deux fonctions croissantes continues à droite.
   (ii) Il existe une mesure signée μ sur $[a, b]$ telle que $f(x) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.
   (iii) f est continue à droite et à variation bornée c'est-à-dire que f vérifie la condition suivante
$$\sup_{n \geq 2, a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq b} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| < \infty.$$
2. Donner un exemple de fonction continue $[0, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ qui ne soit pas à variation finie.

Corrigé :

(i)⇒(ii) : On suppose que $f = g - h + f(a)$ avec g et h croissantes, continues à droite et $g(a) = h(a) = 0$. Soit ν_g (resp. ν_h) la mesure de Stieljes associée à g (resp. h). Posons
$$\mu = \nu_g - \nu_h + f(a)\delta_a.$$
Alors μ est une mesure signée sur $[a, b]$ telle que $f(x) = \mu([a, x])$ pour tout $x \in [a, b]$.

(ii)⇒(iii) : Il est évident que f est continue à droite. Soient $n \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq b$. Alors
$$\sum_{i=1}^{n-1} |f(a_i) - f(a_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n-1} |\mu(]a_{i-1}, a_i])| \leq \sum_{i=1}^{n-1} |\mu|(]a_{i-1}, a_i]) \leq |\mu|([a, b]).$$
Donc f est à variation bornée.

(iii)⇒(i) : Pour tout $x \in [a, b]$, posons
$$V(x) = \sup_{n \geq 2, a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq x} \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)|.$$
Alors V est croissante. On peut donc définir pour tout $x \in [a, b]$,
$$g(x) = \lim_{y \downarrow x} V(y).$$

Ainsi, g est croissante et continue à droite. Posons $h = g - f$. Alors h est continue à droite. Montrons que h est croissante. Soient $a \leq x < y \leq b$ et $\varepsilon > 0$. Pour tous $n \geq 2$ et $a \leq a_1 < \ldots < a_n \leq x$, on a

$$\begin{aligned} V(y+\varepsilon) - f(y+\varepsilon) &\geq |f(y+\varepsilon) - f(x)| + \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(y+\varepsilon) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| + |f(x) - f(a_n)| - f(x) \\ &\geq V(x) - f(x). \end{aligned}$$

Donc, $h(y+\varepsilon) \geq h(x)$ puis en faisant tendre ε vers 0 on obtient $h(y) \geq h(x)$.
2. La fonction $f : x \in]0,1] \mapsto x\cos(1/x)$, prolongée par continuité en 0 n'est pas à variation bornée : considérer la subdivision

$$0 < \frac{1}{n\pi} < \ldots < \frac{1}{3\pi} < \frac{1}{2\pi} < \frac{1}{\pi} < 1.$$

□

Exercice 8. **(Théorème de Vitali-Saks)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Une famille $(\nu_i)_{i\in I}$ de mesures sur $\mathcal{A}$ est dite *absolument équicontinue* par rapport à la mesure μ si :

$$\begin{cases} \forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon \in \mathcal{A}, & \mu(A_\epsilon) < +\infty \text{ et } \forall i \in I, \nu_i(A_\epsilon^c) < \epsilon, \\ \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall A \in \mathcal{A}, & \mu(A) < \delta \Longrightarrow \forall i \in I, \nu_i(A) < \epsilon \end{cases}$$

On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe stable par intersection finie contenant X. Le but est de prouver le résultat suivant

Théorème de Vitali-Saks. Soit $(\nu_n)_{n\geq 1}$ une suite de mesures finies sur $\mathcal{A}$, absolument équicontinue par rapport à μ et telle que pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu_n(C)$ existe dans $\mathbb{R}_+$. Alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\nu(A) = \lim_n \nu_n(A)$ existe dans $\mathbb{R}_+$ et ν définit une mesure absolument continue par rapport à μ.

1. Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{A};\ \nu(A) = \lim_n \nu_n(A) \text{ existe dans } \mathbb{R}_+\}$. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par différence propre (c-à-d si $A, B \in \mathcal{B}$ avec $A \subset B$, alors $B \backslash A \in \mathcal{B}$).
2. Soient $(B_k)_{k\geq 1}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{B}$ et B leur réunion. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B) = \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k).$$
3. En déduire que $\mathcal{B} = \mathcal{A}$.
4. Montrer que l'application ν est une mesure sur $\mathcal{A}$, absolument continue par rapport à la mesure μ.

Corrigé :
(ou plutôt ébauche de corrigé)

1. Pas de difficulté.
2. D'abord voir que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k) \leq \liminf_{n\to\infty} \nu_n(B)$ en utilisant le lemme de Fatou (pour la mesure de comptage). Pour prouver que $\displaystyle\limsup_{n\to\infty} \nu_n(B) \leq \sum_{k\geq 1} \lim_{n\to\infty} \nu_n(B_k)$, écrire pour tout $\epsilon > 0$ et $n, k \geq 1$:
$$\nu_n(B) \leq \sum_{j=1}^{k} \nu_n(B_j) + \nu_n\left(A_\epsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\right) + \nu_n(A_\epsilon^c \cap B),$$
et utiliser le fait que $\mu\left(A_\epsilon \cap \bigcap_{j>k} B_j\right) \to 0$ lorsque $k \to \infty$.

3. On voit que $\mathcal{B}$ est une classe monotone (on utilise ici l'hypothèse $X \in \mathcal{C}$), ce qui fournit le résultat désiré en utilisant le lemme de la classe monotone.
4. Pas de difficulté en utilisant l'équicontinuité.

$\square$

Dans l'exercice suivant, on note $(f \cdot \mu)$ la mesure absolument continue par rapport à μ de densité f.

Exercice 9. **(Exercice 5 dans $\mathbb{L}^1$: cas particulier du théorème de Dunford-Pettis)** Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini. On suppose que $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est une classe dénombrable stable par intersection finie contenant X.

1. Montrer que c'est le cas lorsque X est un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne.

   Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de $\mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ (càd la suite $(\|f_n\|_1)_{n\geq 1}$ est bornée) telle que la suite de mesures $(|f_n| \cdot \mu)_{n\geq 1}$ est absolument équicontinue par rapport à μ (voir l'exercice précédent pour une définition).
2. Montrer qu'il existe une sous-suite $(f_{\phi(n)})_{n\geq 1}$ telle que les deux suites de mesures définies par $\nu^{\pm} := f_n^{\pm} \cdot \mu$ vérifient : pour tout $C \in \mathcal{C}$, $\lim_n \nu^{\pm}_{\phi(n)}(C)$ existent dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe $f \in \mathbb{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ vérifiant pour tout $A \in \mathcal{A}$: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_A f_{\phi(n)} d\mu = \int_A f d\mu$.
4. En déduire la *convergence faible* de $f_{\phi(n)}$ vers f : $\forall g \in \mathbb{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_X f_{\phi(n)} g d\mu = \int_X f g d\mu$.
5. Une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ qui converge faiblement au sens de 4. (mais pour la suite elle-même) converge-t-elle nécessairement μ-p.p. ou en norme $\|\cdot\|_1$ vers f ? Comparer avec l'exercice 9 du TD4.

Corrigé :
(ou plutôt ébauche de corrigé)

1. Prendre $\mathcal{U} = (U_n)_{n\geq 0}$ une base dénombrable d'ouverts de X avec $U_0 := X$, puis choisir $\mathcal{C}$ comme étant composée par les intersections finies d'éléments de $\mathcal{U}$.
2. Pour tout $C \in \mathcal{C}$, les suites $(\nu_n^{\pm}(C))_{n\geq 1}$ sont bornées, donc admettent une valeur d'adhérence. Utiliser ensuite le procédé d'extraction diagonal et la dénombrabilité de $\mathcal{C}$.
3. Appliquer l'exercice précédent aux suites de mesures $(\nu_n^{\pm})_{n\geq 1}$, puis le théorème de Radon-Nikodym à leur limite (justifier qu'on peut l'appliquer !)
4. Si $g \in \mathbb{L}^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$, voir que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction étagée g_ϵ telle que $\|g - g_\epsilon\|_\infty < \epsilon$.
5. Considérer la suite définie sur $[0, 1]$ par $f_n(x) = \sin(nx)$.

$\square$

Fin