TD 7 — Espaces $\mathbb{L}^p$

1 – Petites questions

0) Donner un exemple de $f \in \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ telle que $f \notin L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour tout $p > 1$, et un exemple de $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ avec $p > 1$ telle que $f \notin \mathbb{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$.

1) Soient $p \geq 1$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f. Rappeler pourquoi il existe une extractrice ϕ et une fonction $h \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ telle que $(f_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ converge μ-p.p. vers f et $|f_{\phi(n)}| \leq h$ pour tout $n \geq 1$, μ-p.p.

Indication : Calquer la démonstration de la complétude des espaces $\mathbb{L}^p$.

2) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge dans $\mathbb{L}^p$ vers f et qui converge également μ-p.p. vers g. Montrer que $g \in \mathbb{L}^p$ et que $f = g$ μ-p.p.

3) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu) \cap \mathbb{L}^q(E, \mathcal{A}, \mu)$ avec $p, q \in [1, +\infty[$ et $p \neq q$. On suppose que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^p$ quand $n \to \infty$ et que $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^q$. Montrer que $f_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^q$ quand $n \to \infty$.

2 – Espaces $\mathbb{L}^p$

Rappel (**Théorème d'Egoroff** – TD 3, Exercice 5). Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite fonctions qui converge μ-p.p. vers f. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ de mesure $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ tel que la suite f_n converge uniformément vers f sur $E \setminus A_\varepsilon$.

Exercice 1. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$. On considère une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ bornée de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$, $p \in]1, \infty[$ et une fonction mesurable f sur $(E, \mathcal{A}, \mu)$ telles que $f_n \to f$ μ-p.p. quand $n \to \infty$.

1. Montrer que $f \in \mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer que $f_n \to f$ dans $\mathbb{L}^r$ quand $n \to \infty$ pour tout $r \in [1, p[$.
3. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 2. **(Lemme de Scheffé)** Soient $p \in [1, \infty[$ et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$ qui converge μ-p.p. vers une fonction f de $\mathbb{L}^p(E, \mathcal{A}, \mu)$. Montrer l'équivalence suivante :

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_p = \|f\|_p.$$

Indication : considérer $g_n = 2^p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p$, un peu comme dans la preuve du théorème de convergence dominée.

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 3. **(Théorème de Lusin, le retour)** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K_\epsilon \subset [a,b]$ tel que $\lambda([a,b] \cap K_\varepsilon^c) \leq \varepsilon$ et f soit continue sur K_ϵ.

Indication : on pourra utiliser le théorème d'Egoroff et le fait que les fonctions continues sur $[a,b]$ sont denses dans $L^1([a,b])$.

Exercice 4. **(Inégalité de Hardy)** Soient $(X,\mathcal{X},\mu)$ et $(Y,\mathcal{Y},\nu)$ deux espaces mesurés σ-finis. On considère $\varphi : (X \times Y, \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable et intégrable par rapport à la mesure produit $\mu \otimes \nu$, et F la fonction définie pour μ-p.t. $x \in X$ par $F(x) = \int_Y \varphi(x,y)\nu(dy)$.

1. Montrer que F vérifie l'inégalité $\|F\|_{\mathbb{L}^p(\mu)} \leq \int_Y \|\varphi(.,y)\|_{\mathbb{L}^p(\mu)}\nu(dy)$.
2. En déduire que pour toute fonction $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^*))$ avec $p \in]1,\infty[$, la fonction F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$, vérifie l'inégalité suivante (appelée inégalité de Hardy) : $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p$.

Exercice 5. **(Super Hölder)**

1. Soient $p,q,r \in [1,\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. Soient $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R})$ et $g \in \mathbb{L}^q(\mathbb{R})$. Montrer que $f * g$ est définie presque partout et que $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.
   Indication :
   $$|f(x-y)g(y)| = (|f(x-y)|^p |g(y)|^q)^{\frac{1}{r}} \, (|f(x-y)^p|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \, (|g(y)|^q)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}$$
2. Soit $f \in \mathbb{L}^1$ et $g \in \mathbb{L}^p$, $p \geq 1$. Montrer que pour tout $|a| < \|f\|_1^{-1}$ l'équation $h - af * h = g$ possède une unique solution dans $\mathbb{L}^p$.

Exercice 6. **(Continuité de l'opérateur de translation)**
Soient $h \in \mathbb{R}$ et $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable. On définit $\tau_h f$ par

$$\tau_h f(x) = f(x-h), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifier que l'opérateur de translation τ_h est une isométrie de l'espace $\mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ pour $p \in [1,+\infty]$.
2. On suppose $p < \infty$. Montrer que si $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ alors,
   $$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$
   $$\lim_{|h| \to +\infty} \|\tau_h f - f\|_p = 2^{1/p}\|f\|_p.$$
   Indication : on pourra traiter tout d'abord le cas où f est continue à support compact.
3. Que deviennent les résultats de la question (2.) si $p = \infty$?
4. – Déduire des questions précédentes que si $\lambda(A) > 0$, alors l'ensemble $A - A = \{x - y : x,y \in A\}$ contient un voisinage de 0.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 7. Soient $r, s \in [1, \infty[$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que :

$$\forall y \in \mathbb{R}, \qquad |g(y)| \leq c|y|^{r/s}. \tag{1}$$

Soit Φ l'application de $\mathbb{L}^r(X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$ définie par $\Phi(f) = g \circ f$.

1. Vérifier que $\Phi(f) \in \mathbb{L}^s(X, \mathcal{A}, \mu)$.
2. Montrer que Φ est continue.
   Indication : on pourra utiliser le critère séquentiel de la continuité, et utiliser la question 1) des petites extractions du début du TD.
3. Que se passe-t-il si la condition (1) n'est plus satisfaite ?

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 8.

1. Soient $p \in [1, +\infty[$ et $f \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), \lambda)$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que F est bien définie et que si q est l'exposant conjugué de p, alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x+h) - F(x)|}{|h|^{1/q}} = 0.$$

2. En déduire que si g est une fonction sur $\mathbb{R}_+$ de classe $\mathcal{C}^1$ intégrable telle que $g' \in \mathbb{L}^p(\mathbb{R}_+)$ pour un $p \in [1, +\infty[$, alors $g(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Exercice 9. Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $p \in [1, \infty[$. Soit $g : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable telle que, pour tout fonction $f \in \mathbb{L}^p$, on a $fg \in \mathbb{L}^p$. Montrer que $g \in \mathbb{L}^\infty$.

Fin