TD 13 — Lemmes de Borel–Cantelli

0 – Petites questions

Soit, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout entier $n \geq 1$, Z_n est une variable aléatoire exponentielle de paramètre n.

1. Montrer que Z_n converge presque sûrement vers 0 lorsque $n \to \infty$.
2. Montrer que presque sûrement, à partir d'un certain rang, $Z_n < Z_1$.
3. On suppose ici que les variables aléatoires $(Z_n)_{n \geq 1}$ sont indépendantes. Calculer $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}[Z_n > Z_1]$. Commenter.

1 – Lemmes de Borel–Cantelli

Exercice 1. Soit $\alpha > 0$, et soit, sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $(Z_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi donnée par

$$\mathbb{P}(Z_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$

Montrer que $Z_n \to 0$ dans $\mathbb{L}^1$ mais que, p.s.,

$$\limsup_{n \to \infty} Z_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha \leq 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}.$$

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. On note F la fonction de répartition de X_1 et on suppose que X_1 n'est pas p.s. constante.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < F(a) < 1$. Montrer que p.s.,

$$\liminf_{n \to \infty} X_n \leq a \leq \limsup_{n \to \infty} X_n.$$

2. On pose $\alpha = \inf\{x \in \mathbb{R} : F(x) > 0\}$ et $\beta = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$. Montrer que $\alpha < \beta$, que $\alpha \neq +\infty$ et que $\beta \neq -\infty$.
3. Montrer que p.s.,

$$\limsup_{n \to \infty} X_n = \beta \quad \text{et} \quad \liminf_{n \to \infty} X_n = \alpha.$$

Pour des questions, demande de précisions ou explications, n'hésitez pas à m'envoyer un mail à igor.kortchemski@ens.fr , ou bien à venir me voir au bureau V4.

Exercice 3. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_n = 0) = 1/2$. Posons :

$$L_n := \max\{k \geq 1;\ \text{il existe } i \leq n-k \text{ tel que } X_{i+1} = \cdots = X_{i+k} = 1\}.$$

1. Montrer que p.s. $\limsup_{n\to\infty} L_n/\ln(n) \leq 1/\ln(2)$.
2. Montrer que p.s. $\liminf_{n\to\infty} L_n/\ln(n) \geq 1/\ln(2)$.
3. Conclure.

Exercice 4. Soit $(X_n, n \geq 0)$ une suite de variables aléatoires réelles positives, indépendantes et de même loi définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1. Montrer que p.s. $\sum_{n=0}^{\infty} X_n = \infty$, sauf dans un cas à préciser.
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a l'équivalence suivante :

$$\mathbb{E}[X] < \infty \iff \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}[X \geq \alpha n] < \infty.$$

Indication. On pourra montrer que

$$\sum_{n\geq 0} \alpha n \mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)) \leq \mathbb{E}[X] \leq \sum_{n\geq 0} \alpha(n+1)\mathbb{P}(\alpha n \leq X < \alpha(n+1)).$$

En déduire la dichotomie suivante : p.s.

$$\limsup \frac{X_n}{n} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{E}[X_1] < \infty \\ \infty & \text{si } \mathbb{E}[X_1] = \infty \end{cases}.$$

Exercice 5. (LFGN cas non intégrable) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. On pose, pour tout $n \geq 1$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(|X_1|) \leq 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| \geq n).$$

2. En déduire que si X_1 n'est pas intégrable alors la suite $(n^{-1}S_n)_{n\geq 1}$ diverge p.s.

Exercice 6. Montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^* := \{1, 2, \ldots\}$ telle que, pour tout $n \geq 1$, la probabilité de l'ensemble des multiples de n soit égale à $1/n$.

Exercice 7. Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. de Bernoulli indépendantes définies par $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p$ et $\mathbb{P}(Y_n = -1) = 1-p$ avec $0 < p < 1$ et $p \neq 1/2$. On considère la marche aléatoire $Z_n = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ (avec $Z_0 = 0$). On note $A_n = \{Z_n = 0\}$.

a) Que représente l'événement $\limsup_{n\to\infty} A_n$?

b) Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$.

2 – Loi du 0–1 de Kolmogorov

Exercice 8. Montrer que si les variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes, la série $\sum_{n\geq 0} X_n$ converge ou diverge presque sûrement.

Exercice 9. On suppose que les variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\geq 0}$ sont indépendantes.

a) Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geq 0} X_n z^n$ est presque sûrement constant.

b) On suppose maintenant que les variables aléatores $(X_n)_{n\geq 0}$ ont même loi. Montrer que si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] = \infty$, alors $R = 0$ p.s. , et que si $\mathbb{E}[\ln(|X_1|)^+] < \infty$, alors $R \geq 1$ p.s.

3 – À chercher pour la prochaine fois

Exercice 10. Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de v.a. i. i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

1. Montrer que $\limsup_{n\to\infty} X_n/\ln(n) = 1$ p.s.
2. On pose $Z_n = \max(X_1, ..., X_n)/\ln(n)$, montrer que $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geq 1$ p.s.
3. Montre que pour une suite $(n_k)_{k\geq 0}$ bien choisie, $\limsup_{k\to\infty} Z_{n_k} \leq 1$ p.s. En déduire que $\lim_{n\to\infty} Z_n = 1$ p.s.

4 – Compléments (hors TD)

Exercice 11. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes positives, de même loi. On considère l'événement F défini par :

$F = \{\omega$; il existe une suite infinie croissante $(n_k)_{k\geq 1}$ pouvant dépendre de ω pour laquelle $X_{n_k}(\omega) > n_k\}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(F) = 0$ ou 1.

b) Montrer que $\mathbb{P}(F)$ ne dépend que de $\mathbb{E}[X_1]$.

Exercice 12. (✯✯) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi donnée par :

$$\mathbb{P}[X_n = 1] = \mathbb{P}[X_n = -1] = 1/2, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Montrer qu'avec probabilité 1, il n'existe aucun point z_0 du cercle de convergence de la série entière $F(z) = \sum_{n\geq 0} X_n z^n$ tel que F se prolonge autour de z_0 en une fonction développable en série entière autour de z_0.

Fin