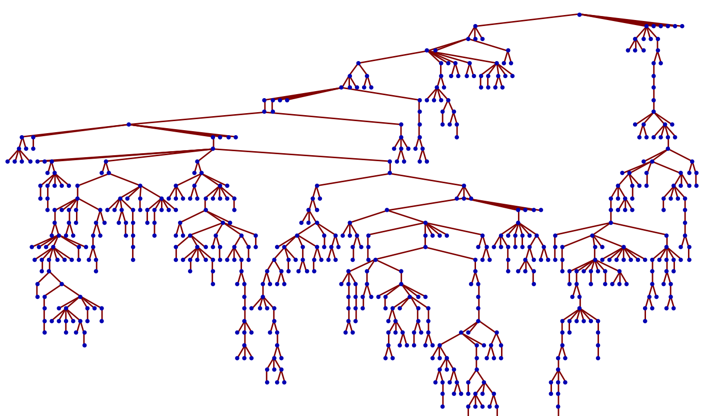
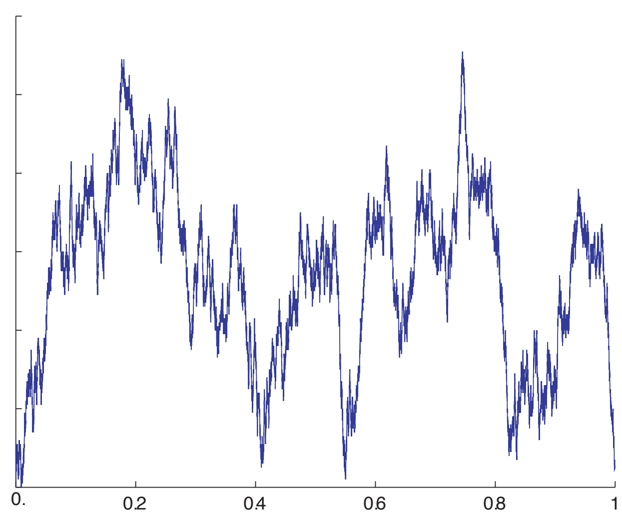
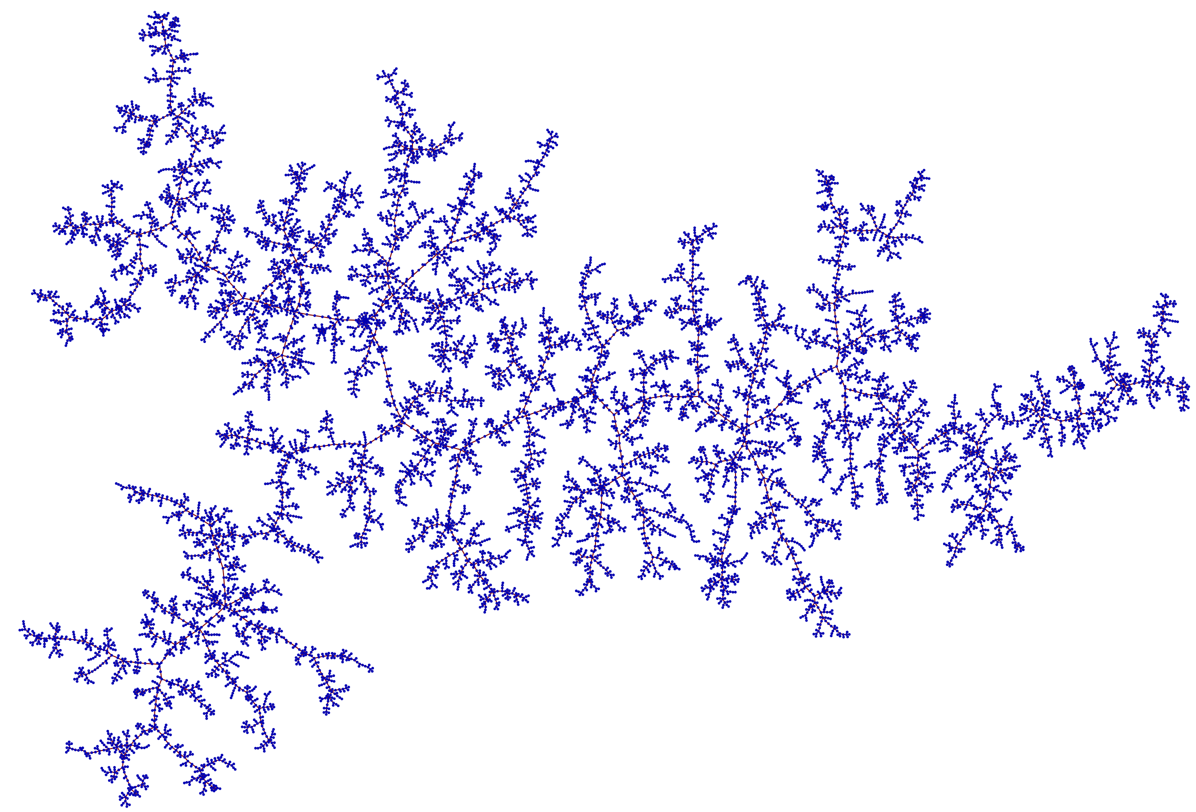
Arbres et marches aléatoires







Igor Kortchemski

CNRS & École polytechnique

Journées X-UPS 2016 – École polytechnique – Mai 2016

Rappel : arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0) + \mu(1) < 1$ et $\sum_{k \geqslant 0} k\mu(k) \leqslant 1$.

Rappel : arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0) + \mu(1) < 1$ et $\sum_{k \geqslant 0} k\mu(k) \leqslant 1$.

On pose, pour tout $\tau \in \mathbb{T}$,

$$\mathbb{P}_\mu(\tau) = \prod_{u \in \tau} \mu(k_u)$$

Rappel : arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0)+\mu(1)<1$ et $\sum_{k\geqslant 0} k\mu(k)\leqslant 1$.

On pose, pour tout $\tau \in \mathbb{T}$,

$$\mathbb{P}_\mu(\tau)=\prod_{u\in\tau}\mu(k_u)$$

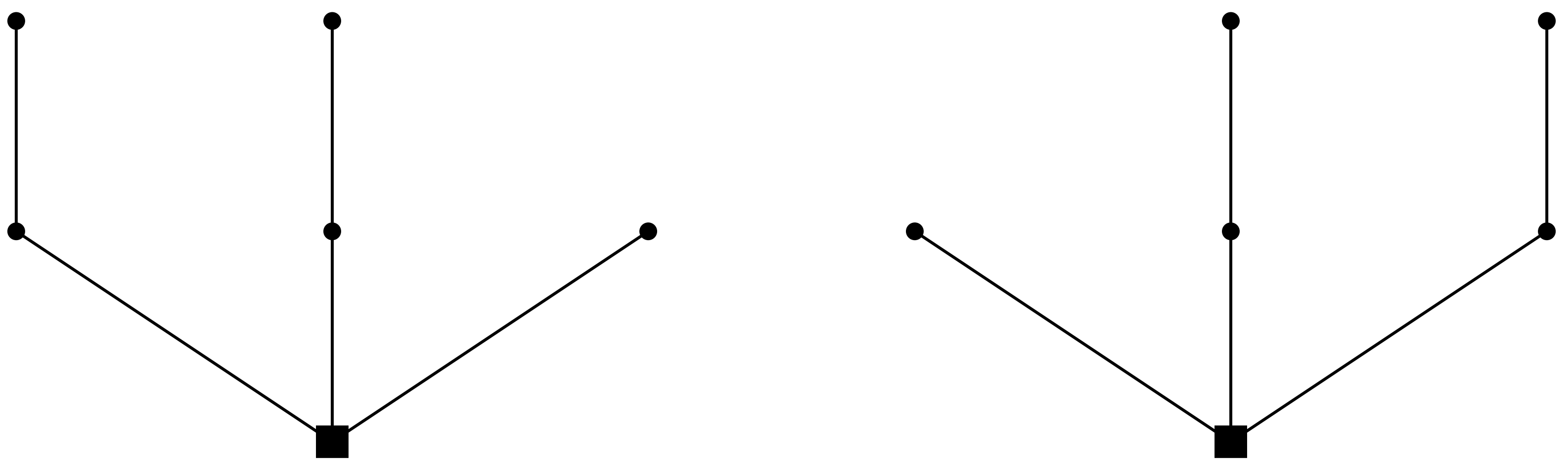


Figure: Ces deux arbres ont la même probabilité $\mu(3)\mu(1)^2\mu(0)^3$.

Rappel : arbres de BGW

Soit μ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $\mu(0)+\mu(1)<1$ et $\sum_{k\geqslant 0} k\mu(k)\leqslant 1$.

On pose, pour tout $\tau\in\mathbb{T}$,

$$\mathbb{P}_\mu(\tau)=\prod_{u\in\tau}\mu(k_u)$$

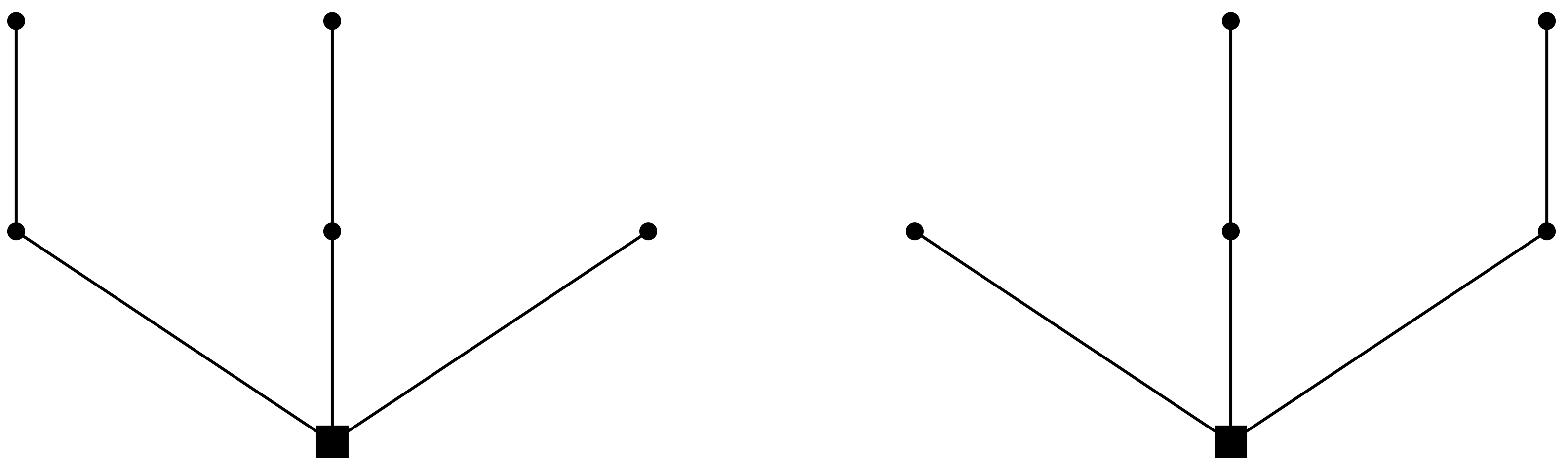
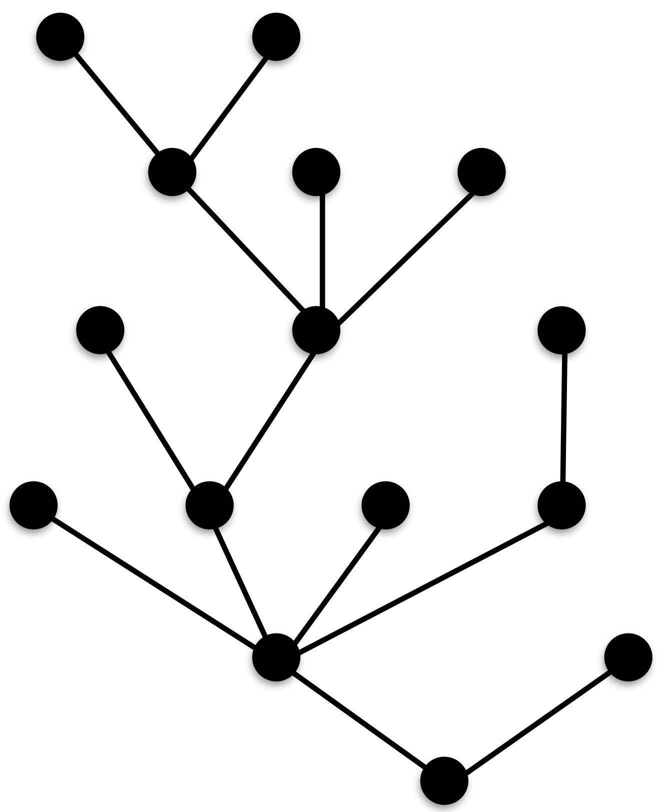


Figure: Ces deux arbres ont la même probabilité $\mu(3)\mu(1)^2\mu(0)^3$.

$\leadsto$ $\mathbb{P}_\mu$ définit bien une probabilité sur $\mathbb{T}$.

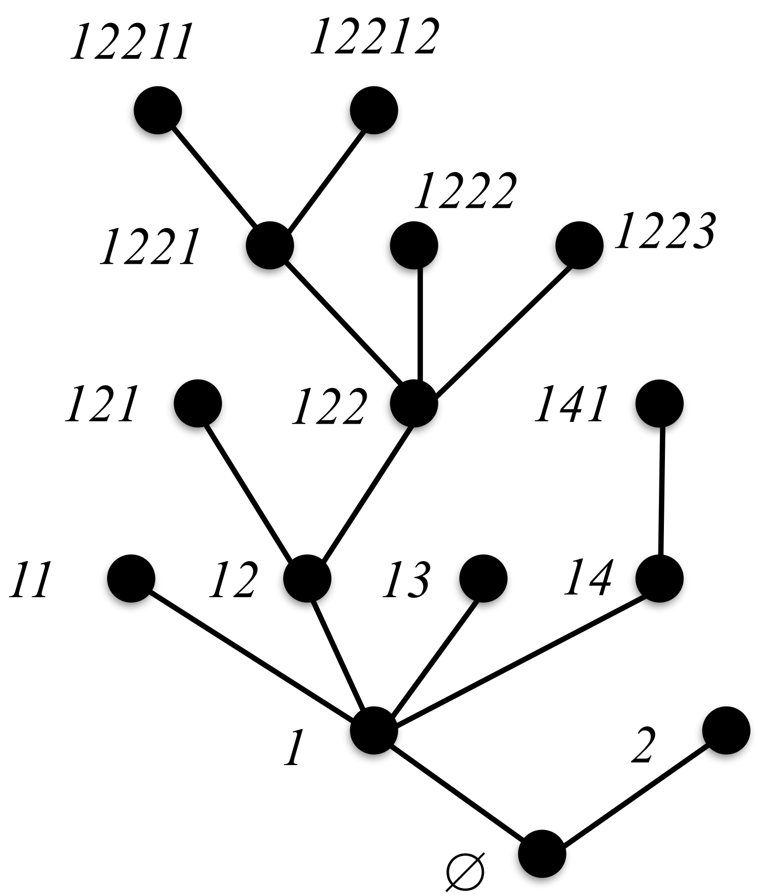
II. Codage par des marches aléatoires

L'ordre lexicographique



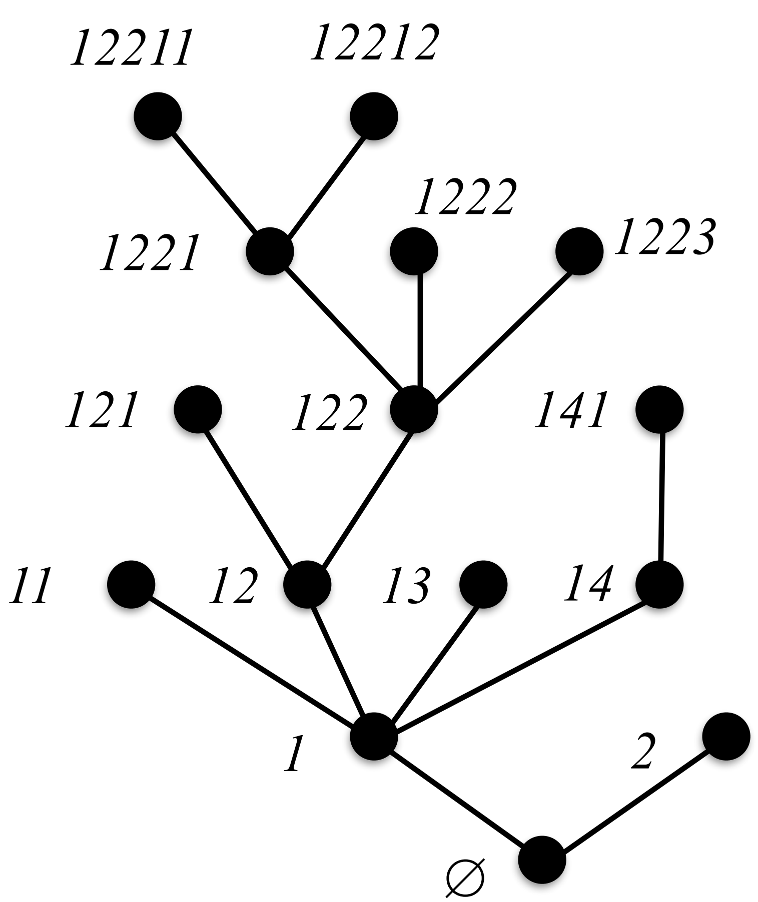
L'ordre lexicographique

On étiquette les sommets d'un arbre τ.



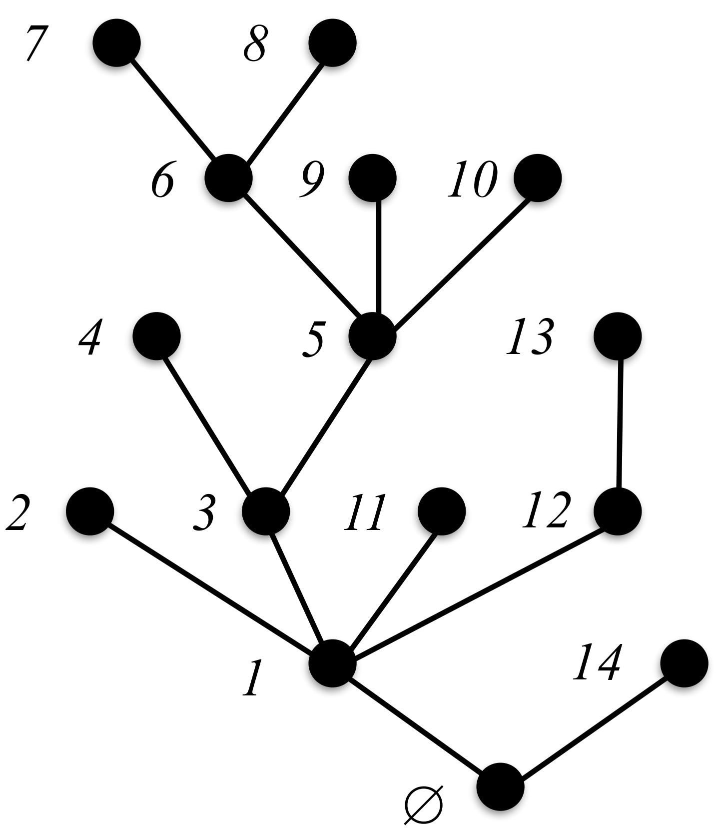
L'ordre lexicographique

On étiquette les sommets d'un arbre τ. On considère ensuite ses sommets ordonnés dans l'ordre lexicographique : $u(0) \prec u(1) \prec \cdots \prec u(|\tau|-1)$, où $|\tau|$ est la taille τ.



L'ordre lexicographique

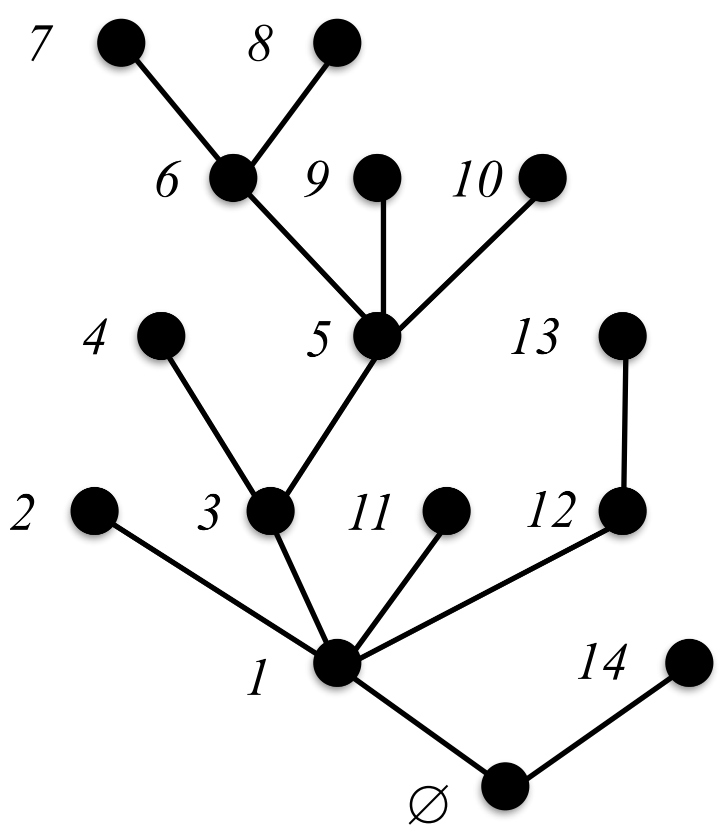
On étiquette les sommets d'un arbre τ. On considère ensuite ses sommets ordonnés dans l'ordre lexicographique : $u(0) \prec u(1) \prec \cdots \prec u(|\tau|-1)$, où $|\tau|$ est la taille τ.



La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

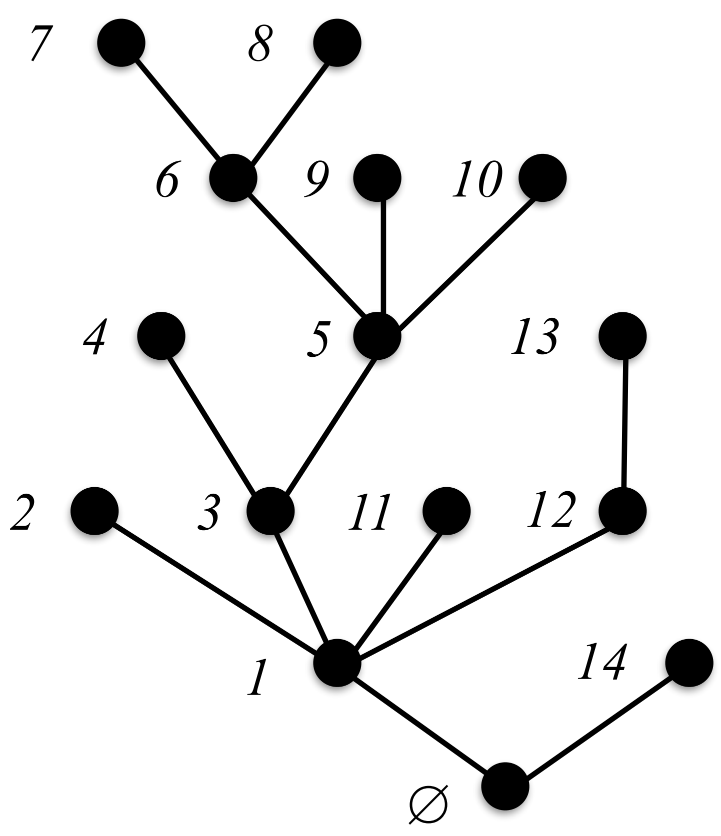


La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

(ii) $\mathcal{W}_{i+1}(\tau) - \mathcal{W}_i(\tau) = \left[\text{nombre d'enfants de } u(i)\right] - 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$.

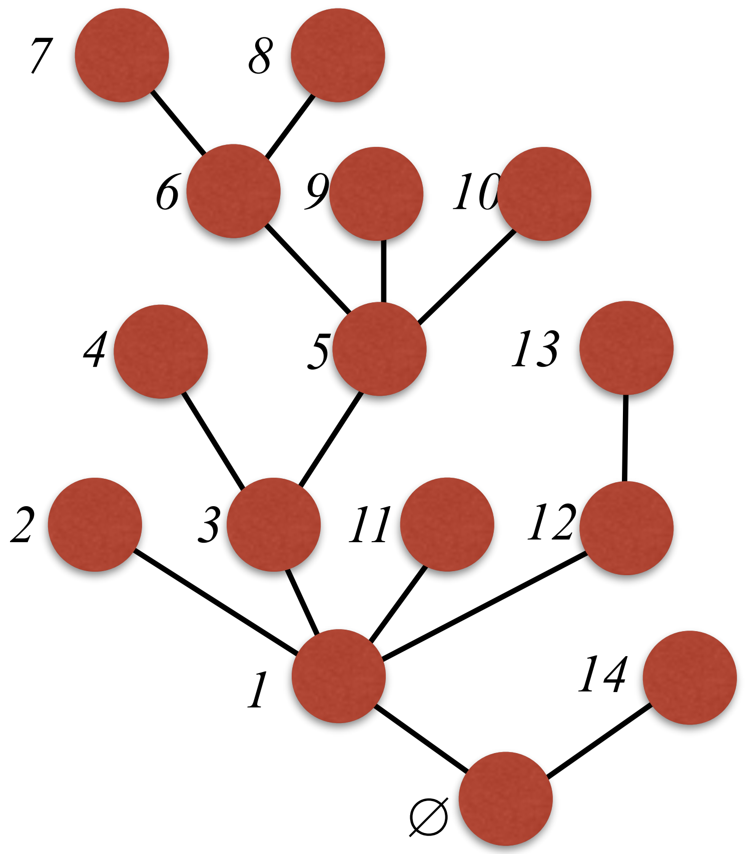


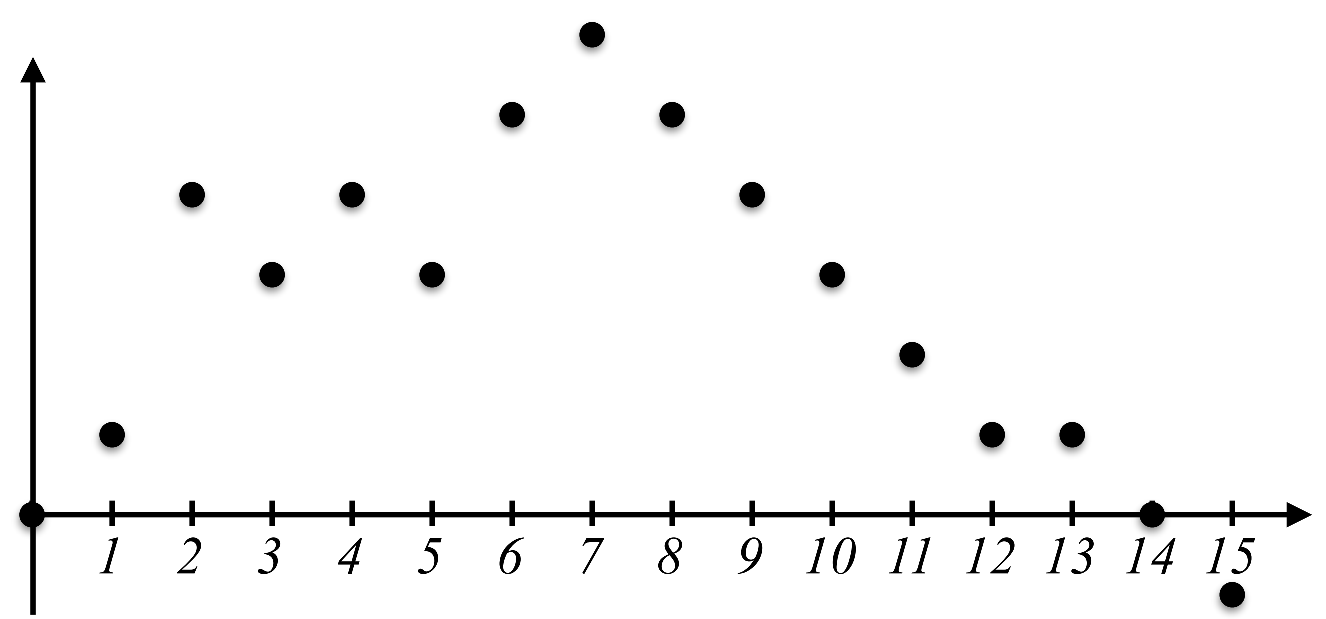
La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

(ii) $\mathcal{W}_{i+1}(\tau) - \mathcal{W}_i(\tau) = \big[\text{nombre d'enfants de } u(i)\big] - 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$.



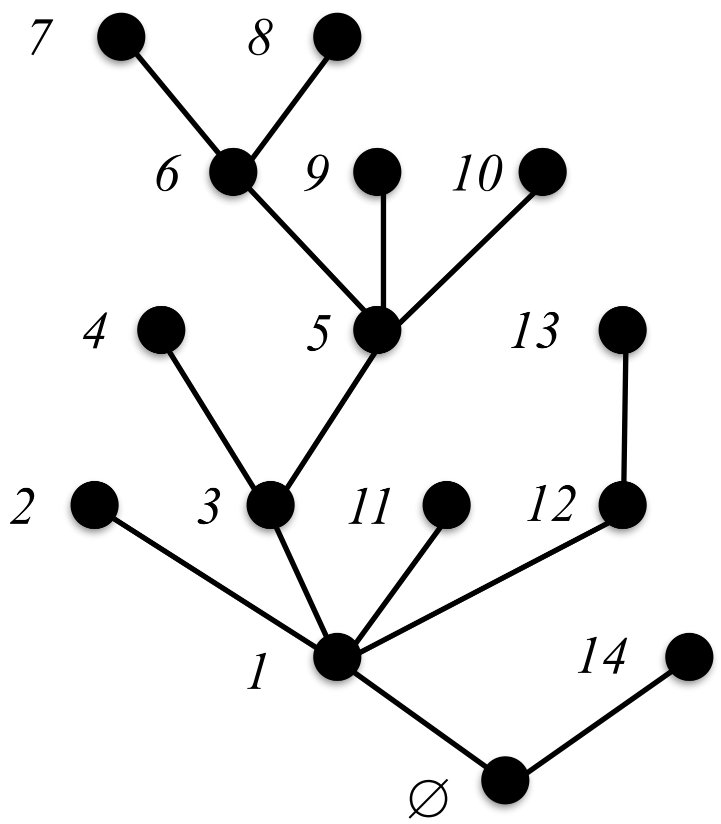


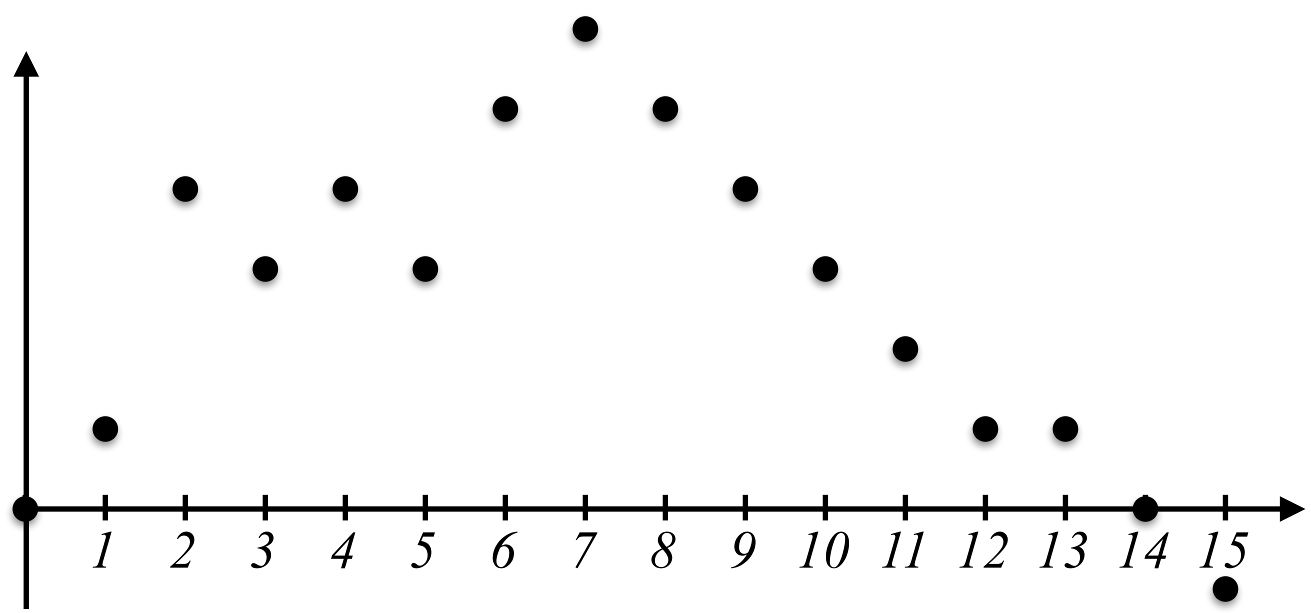
La marche de Łukasiewicz

La marche de Łukasiewicz $(\mathcal{W}_0(\tau), \mathcal{W}_1(\tau), \ldots, \mathcal{W}_{|\tau|}(\tau))$ d'un arbre τ est définie par :

(i) $\mathcal{W}_0(\tau) = 0$,

(ii) $\mathcal{W}_{i+1}(\tau) - \mathcal{W}_i(\tau) = \big[\text{nombre d'enfants de } u(i)\big] - 1$ pour $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$.





$\rightsquigarrow$ Fait : $\mathcal{W}_i(\tau) \geqslant 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant |\tau| - 1$, et $\mathcal{W}_{|\tau|}(\tau) = -1$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

Théorème.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW_μ arbre a la même loi que $(W_0, W_1, \ldots, W_{\zeta_1})$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

Théorème.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW_μ arbre a la même loi que $(W_0, W_1, \ldots, W_{\zeta_1})$.

Corollaire

(1) La taille d'un BGW_μ arbre a la même loi que ζ_1 : $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW arbre

Soit $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$.
On pose

$$\zeta_1 = \inf\{n \geqslant 1 : W_n = -1\}.$$

Théorème.

La marche de Łukasiewicz d'un BGW_μ arbre a la même loi que $(W_0, W_1, \ldots, W_{\zeta_1})$.

Corollaire

(1) La taille d'un BGW_μ arbre a la même loi que ζ_1 : $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$.

(2) Si $\mathcal{T}_n$ est BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets, $(\mathcal{W}_i(\mathcal{T}_n))_{0 \leqslant i \leqslant n}$ a la même loi que la marche aléatoire $(W_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, conditionnée à toucher -1 pour le première fois à l'instant n.

Bias de la marche aléatoire sous-jacente

Point clé : la $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$ vérifie :

$$\mathbb{E}[W_1] = \sum_{i \geqslant -1} i\mu(i+1) = \sum_{i \geqslant 0} (i-1)\mu(i) = m - 1$$

où m est la moyenne de μ.

Bias de la marche aléatoire sous-jacente

Point clé : la $(W_i)_{i \geqslant 0}$ une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ telle que $W_0 = 0$ et $\mathbb{P}(W_1 = i) = \mu(i+1)$ pour $i \geqslant -1$ vérifie :

$$\mathbb{E}[W_1] = \sum_{i \geqslant -1} i\mu(i+1) = \sum_{i \geqslant 0} (i-1)\mu(i) = m - 1$$

où m est la moyenne de μ.

On montre de même que la variance de W_1 est égale à la variance de μ.

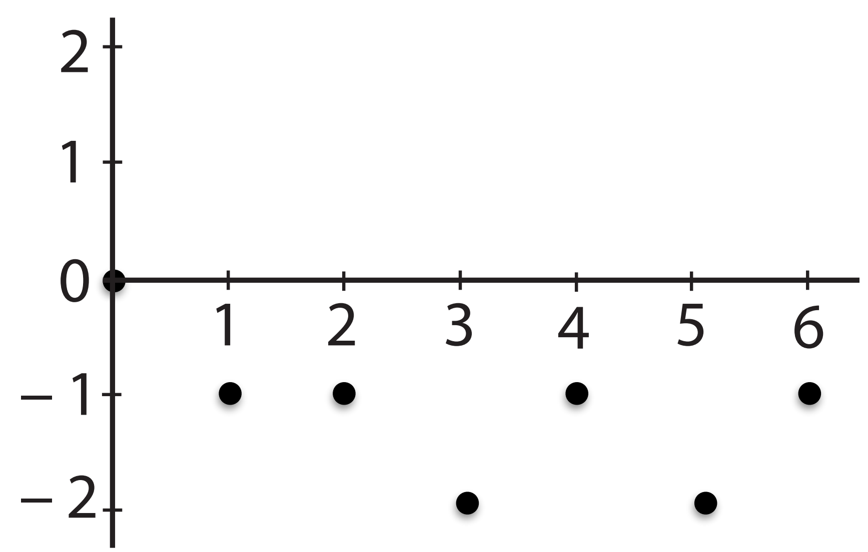
III. Outils pour étudier les marches aléatoires

1) Le lemme cyclique

Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad := \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

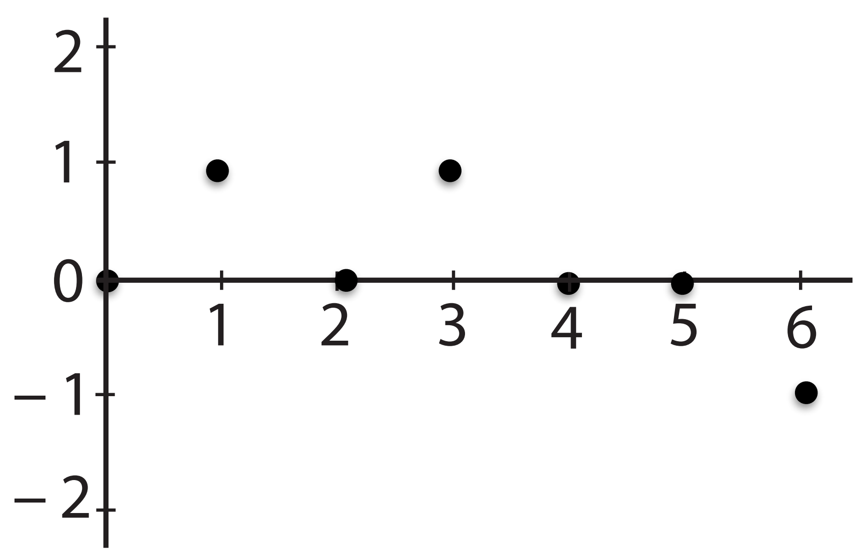


Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad \coloneqq \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \coloneqq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$



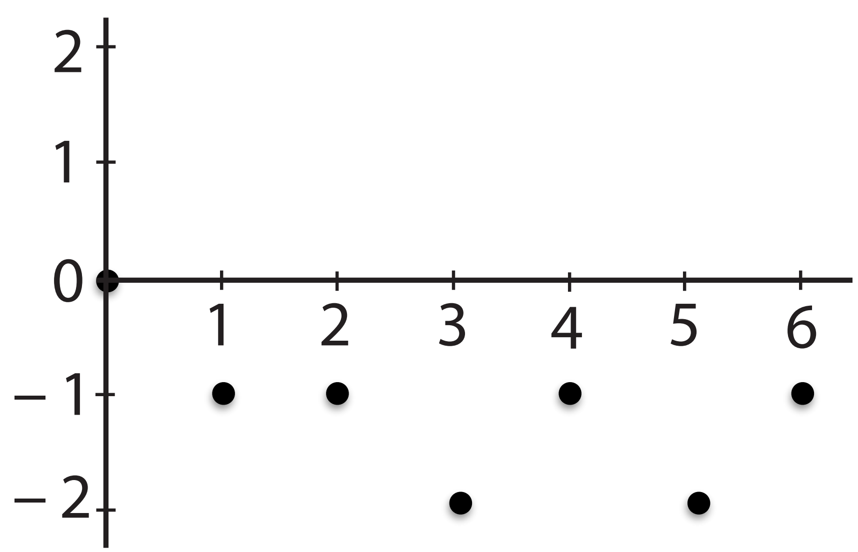
Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad := \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1}, \ldots, x_{i+n})$ (addition modulo n)



Le lemme cyclique

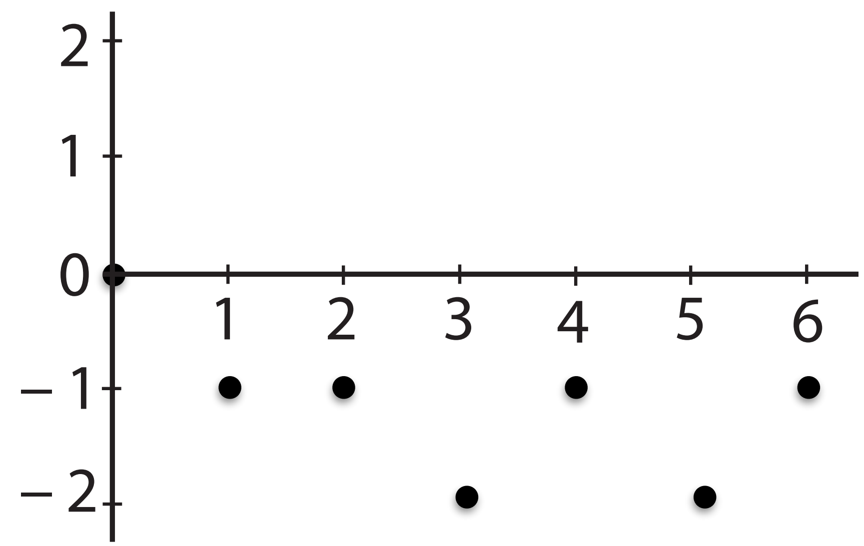
On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad := \quad \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \ldots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1}, \ldots, x_{i+n})$ (addition modulo n) et

$$I_{\mathbf{x}} = \left\{ i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbf{x}^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \right\}.$$



Le lemme cyclique

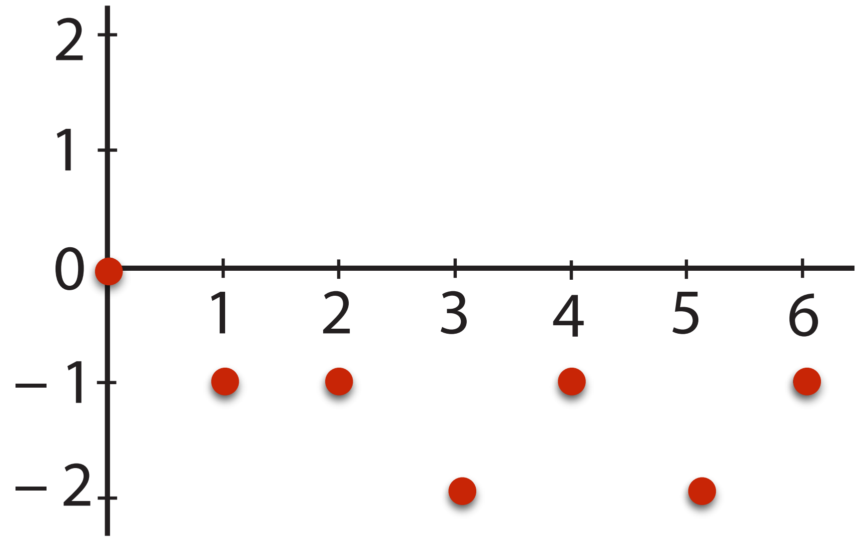
On pose

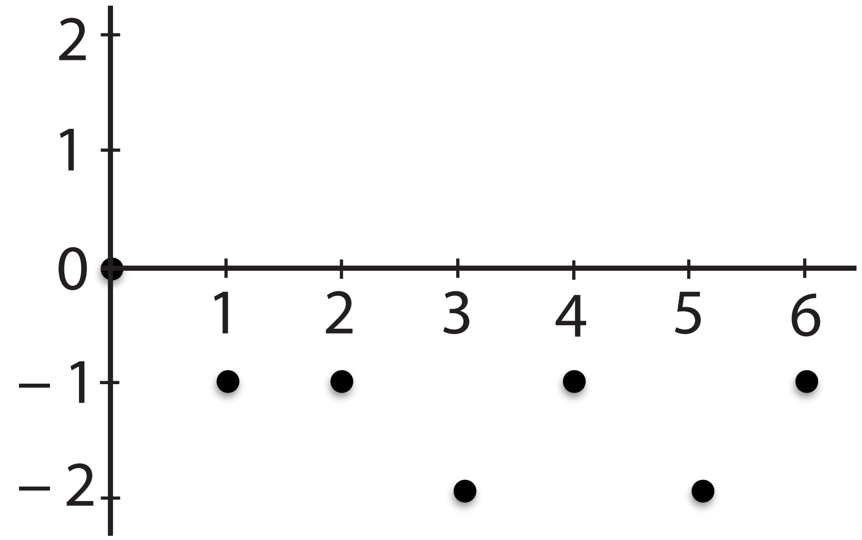
$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad \coloneqq \quad \{(x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \dots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \coloneqq \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$ (addition modulo n) et

$$I_{\mathbf{x}} = \left\{ i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbf{x}^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \right\}.$$





Le lemme cyclique

On pose

$$\mathcal{S}_n^{(1)} \quad := \quad \{(x_1, \dots, x_n) \in \{-1, 0, 1, \dots\} : x_1 + \cdots + x_n = -1\}$$

$$\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)} : x_1 + \cdots + x_j > -1 \text{ pour tout } 1 \leqslant j \leqslant n-1\}.$$

Pour $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\mathbf{x}^{(i)} = (x_{i+1}, \dots, x_{i+n})$ (addition modulo n) et

$$I_{\mathbf{x}} = \left\{ i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} : \mathbf{x}^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)} \right\}.$$

Théorème (Lemme Cyclique)**.**

Pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{S}_n^{(1)}$, on a $\mathrm{Card}(I_{\mathbf{x}}) = 1$.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

$\rightsquigarrow$ Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}|=n)=\frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n=-1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}|=n)=\mathbb{P}(\zeta_1=n)$. Ensuite, si $W_n=X_1+\cdots+X_n$, on pose $\mathbf{X}_n=(X_1,\ldots,X_n)$.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)$.

Déjà, $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \mathbb{P}\left(\zeta_1 = n\right)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right)$$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) \quad = \quad \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right)$$

car $\mathbf{X}_n^{(i)}$ et $\mathbf{X}_n$ ont même loi.

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right] \end{aligned}$$

car $\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}$ ssi $\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}$ et $i \in I_{\mathbf{X}_n}$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)$.

$\rightsquigarrow$ Déjà, $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \mathbb{P}\left(\zeta_1 = n\right)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \ldots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n = -1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right)\right]
\end{aligned}$$

par interversion somme-espérance

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}|=n)=\frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n=-1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}|=n)=\mathbb{P}(\zeta_1=n)$. Ensuite, si $W_n=X_1+\cdots+X_n$, on pose $\mathbf{X}_n=(X_1,\ldots,X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1=n\}=\{\mathbf{X}_n\in\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\},\qquad \{W_n=-1\}=\{\mathbf{X}_n\in\mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\mathcal{T}|=n) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n\in\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)}\in\overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right)\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n\in\mathcal{S}_n^{(1)}}\mathbb{1}_{i\in I_{\mathbf{X}_n}}\right]=\frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n=-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{1}_{i\in I_{\mathbf{X}_n}}\right)\right]\\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n=-1}\right]
\end{aligned}$$

car $\mathrm{Card}(I_{\mathbf{X}_n})=1$ lorsque $W_n=-1$

Application du lemme cyclique

Corollaire

On a $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Déjà, $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n)$. Ensuite, si $W_n = X_1 + \cdots + X_n$, on pose $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$. Ainsi :

$$\{\zeta_1 = n\} = \{\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\}, \qquad \{W_n = -1\} = \{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}\}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) &= \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(\mathbf{X}_n^{(i)} \in \overline{\mathcal{S}}_n^{(1)}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\mathbf{X}_n \in \mathcal{S}_n^{(1)}} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n = -1}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{i \in I_{\mathbf{X}_n}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_n = -1}\right] = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1).
\end{aligned}$$

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(\lambda n)^{n-1}e^{-\lambda n}}{n!}=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda\leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda>1, \text{ où } s\in]0,1[\text{ vérifie } s=e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ Soit μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW$_\mu$ arbre. Montrons que $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}$.

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

Soit μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW_μ arbre. Montrons que $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}$.

D'après ce qu'on vient de voir,

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(W_n = -1) = \frac{1}{n} \mathbb{P}(W_n + n = n - 1).$$

Application : solution de l'exercice 1

Exercice 1. Montrer que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \leqslant 1 \\ s & \text{si} \quad \lambda > 1, \text{ où } s \in]0,1[\text{ vérifie } s = e^{\lambda(s-1)}. \end{cases}$$

⇝ Soit μ est une variable de Poisson de paramètre λ et $\mathcal{T}$ un BGW_μ arbre. Montrons que $\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}$.

⇝ D'après ce qu'on vient de voir,

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \mathbb{P}(\zeta_1 = n) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n = -1) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(W_n + n = n - 1).$$

⇝ Mais $W_n + n$ a la même loi qu'une somme de n variables aléatoires de Poisson indépendantes de paramètre λ, et suit donc une loi de Poisson de paramètre λn. Donc

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) = \frac{1}{n} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(\lambda n)^{n-1} e^{-\lambda n}}{n!}.$$

2) Le théorème Local Limite

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)$.

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Théorème (Théorème Local Limite)**.**

On suppose que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 \coloneqq \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0, \infty)$.

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Théorème (Théorème Local Limite)**.**

On suppose que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 \coloneqq \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0, \infty)$. Alors, en notant $a = \mathbb{E}\left[Z_1\right]$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\,\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k - an}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right| \quad \xrightarrow[n \to \infty]{} \quad 0.$$

Le TLL implique le TCL

Supposons que $a = \mathbb{E}[Z_1] = 0$, de sorte que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) \right| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Alors

Le TLL implique le TCL

Supposons que $a = \mathbb{E}[Z_1] = 0$, de sorte que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Alors

$$\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{Z_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant v \right) \quad = \quad \sum_{k=\lceil u\sigma\sqrt{n} \rceil}^{\lfloor v\sigma\sqrt{n} \rfloor} \mathbb{P}(Z_n = k)$$

Le TLL implique le TCL

Supposons que $a = \mathbb{E}[Z_1] = 0$, de sorte que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) \right| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{Z_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant v\right) &= \sum_{k=\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil}^{\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor} \mathbb{P}(Z_n = k) \\ &= \int_{\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil}^{\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor+1} \mathbb{P}(Z_n = \lfloor x \rfloor)\, dx \end{aligned}$$

Le TLL implique le TCL

Supposons que $a = \mathbb{E}[Z_1] = 0$, de sorte que

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) \right| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{Z_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant v\right) \quad &= \quad \sum_{k=\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil}^{\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor} \mathbb{P}(Z_n = k) \\
&= \quad \int_{\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil}^{\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor+1} \mathbb{P}(Z_n = \lfloor x \rfloor)\, dx \\
&= \quad \int_{\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil/(\sigma\sqrt{n})}^{(\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor+1)/(\sigma\sqrt{n})} \sigma\sqrt{n}\mathbb{P}\left(Z_n = \lfloor x\sigma\sqrt{n}\rfloor\right) dx
\end{aligned}$$

Le TLL implique le TCL

Supposons que $a = \mathbb{E}[Z_1] = 0$, de sorte que

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right| \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(u \leqslant \frac{Z_n}{\sigma\sqrt{n}} \leqslant v \right) &= \sum_{k=\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil}^{\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor} \mathbb{P}(Z_n = k) \\
&= \int_{\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil}^{\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor+1} \mathbb{P}(Z_n = \lfloor x \rfloor)\, dx \\
&= \int_{\lceil u\sigma\sqrt{n}\rceil/(\sigma\sqrt{n})}^{(\lfloor v\sigma\sqrt{n}\rfloor+1)/(\sigma\sqrt{n})} \sigma\sqrt{n}\mathbb{P}\left(Z_n = \lfloor x\sigma\sqrt{n} \rfloor\right) dx \\
&\xrightarrow[n\to\infty]{} \int_u^v \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,
\end{aligned}$$

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Théorème (Théorème Local Limite)**.**

On suppose que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 \coloneqq \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0, \infty)$. Alors, en notant $a = \mathbb{E}\left[Z_1\right]$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k - an}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right) \right| \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}(W_n = -1)$.

Théorème (Théorème Local Limite).

On suppose que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 := \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0, \infty)$. Alors, en notant $a = \mathbb{E}\left[Z_1\right]$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}(Z_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{k - an}{\sigma\sqrt{n}} \right)^2 \right) \right| \quad \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Corollaire

Si μ est une loi de reproduction critique et de variance finie σ^2, alors

$$\mathbb{P}(|\mathcal{T}| = n) \quad \underset{n \to \infty}{\sim} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

But : estimer des quantités comme $\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)$.

Théorème (Théorème Local Limite).

On suppose que $(Z_n)_{n \geqslant 0}$ est une marche aléatoire (apériodique) telle que $\mathbb{E}\left[Z_1^2\right] < \infty$ et que $\sigma^2 := \mathbb{E}\left[Z_1^2\right] - \mathbb{E}\left[Z_1\right]^2 \in (0, \infty)$. Alors, en notant $a = \mathbb{E}\left[Z_1\right]$,

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\mathbb{P}\left(Z_n = k\right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k - an}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right| \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Corollaire

Si μ est une loi de reproduction critique et de variance finie σ^2, alors

$$\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) \quad \underset{n\to\infty}{\sim} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \frac{1}{n^{3/2}}.$$

En effet, $\mathbb{P}\left(|\mathcal{T}| = n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)$ et $\mathbb{P}\left(W_n = -1\right) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ d'après le théorème local limite.

Idée de preuve

- Idée : exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$ comme une intégrale.

Idée de preuve

- Idée : exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$ comme une intégrale.
- On note $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itZ_1}\right]$.

Idée de preuve

- Idée : exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$ comme une intégrale.
- On note $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itZ_1}\right]$.
- On a

$$\mathbb{E}\left[e^{itZ_n}\right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{itj} \mathbb{P}(Z_n = j).$$

Idée de preuve

- Idée : exprimer $\mathbb{P}(Z_n = k)$ comme une intégrale.
- On note $\phi(t) = \mathbb{E}\left[e^{itZ_1}\right]$.
- On a
$$\mathbb{E}\left[e^{itZ_n}\right] = \sum_{j \in \mathbb{Z}} e^{itj} \mathbb{P}(Z_n = j).$$
- Donc
$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \mathbb{E}\left[e^{itZ_n}\right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \phi(t)^n dt.$$

IV. Applications aux BGW arbres

1) Nombre de feuilles

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$.

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW$_\mu$ arbre conditionné à avoir n sommets.

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW$_\mu$ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Théorème.

Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\lambda(\mathcal{T}_n)}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right) \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0)+\mu(1)<1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Théorème.

Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\lambda(\mathcal{T}_n)}{\mu(0)n}-1\right|>\epsilon\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

$\leadsto$ Idée de la preuve : $\lambda(\mathcal{T}_n)$ a la même loi que le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ conditionnellement à $\zeta_1 = n$

Soit μ est une loi de reproduction critique et de variance finie avec $\mu(0) + \mu(1) < 1$. Soit $\mathcal{T}_n$ un BGW_μ arbre conditionné à avoir n sommets. On note $\lambda(\mathcal{T}_n)$ le nombre de feuilles de $\mathcal{T}_n$

Théorème.

Pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\lambda(\mathcal{T}_n)}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad 0.$$

$\leadsto$ Idée de la preuve : $\lambda(\mathcal{T}_n)$ a la même loi que le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ conditionnellement à $\zeta_1 = n$, qui a la même loi que le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$ conditionnellement à $W_n = -1$.

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \ldots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \dots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

$\rightsquigarrow$ L_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $\mu(0)$. Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(L_n)}{\mu(0)^2 n^2} = \frac{1-\mu(0)}{\mu(0)n}.$$

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \dots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

$\rightsquigarrow$ L_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $\mu(0)$. Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(L_n)}{\mu(0)^2 n^2} = \frac{1-\mu(0)}{\mu(0)n}.$$

$\rightsquigarrow$ Or

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon \mid W_n = -1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon, W_n = -1\right)}{\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)}.$$

Soit L_n le nombre de sauts de taille -1 de $(W_0, W_1, \dots, W_n)$. Que dire de L_n conditionnellement à $W_n = -1$?

$\rightsquigarrow$ L_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $\mu(0)$. Donc, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right) \leqslant \frac{\mathrm{Var}(L_n)}{\mu(0)^2 n^2} = \frac{1-\mu(0)}{\mu(0)n}.$$

$\rightsquigarrow$ Or

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon \mid W_n = -1\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon, W_n = -1\right)}{\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)}.$$

Donc

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon \mid W_n = -1\right) \leqslant \frac{\mathbb{P}\left(\left|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1\right| > \epsilon\right)}{\mathbb{P}\left(W_n = -1\right)}.$$

Comme $\mathbb{P}\left(W_n = -1\right) \sim \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ lorsque $n \to \infty$, ceci montre que $\mathbb{P}(|\frac{L_n}{\mu(0)n} - 1| > \epsilon \mid W_n = -1) \to 0$.

2) Exercice 4

Exercice 4.[Question Q809 de Daniel Saada, RMS 124-1] On note F_n l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!] \coloneqq \{1,2,\ldots,n\}$ dans $[\![1,n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

On note Y_n la variable aléatoire définie sur F_n par $Y_n(f) = \mathrm{Card}(f([\![1,n]\!]))$. Des essais numériques montrent que la loi de Y_n est très bien approchée par une loi normale.

Est-il exact que $(Y_n - \mathbb{E}[Y_n])/\sqrt{n}$ tend vers une loi normale ?

Exercice 4.[Question Q809 de Daniel Saada, RMS 124-1] On note F_n l'ensemble des applications de $[\![1,n]\!] \coloneqq \{1,2,\ldots,n\}$ dans $[\![1,n]\!]$, muni de la probabilité uniforme.

On note Y_n la variable aléatoire définie sur F_n par $Y_n(f) = \mathrm{Card}(f([\![1,n]\!]))$. Des essais numériques montrent que la loi de Y_n est très bien approchée par une loi normale.

Est-il exact que $(Y_n - \mathbb{E}[Y_n])/\sqrt{n}$ tend vers une loi normale ?

$\leadsto$ Oui (Kolchin 1986). Idée : treaduire le problème en terme d'occupation d'urnes.

Notons $A_n^{(i)}(f) = \mathrm{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \ldots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \ldots, P_n) \quad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

Notons $A_n^{(i)}(f) = \text{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \ldots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \ldots, P_n) \quad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

Soit $Y_n(f) = \text{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : A_n^{(i)}(f) = 0\})$. Ainsi, en notant $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire dont la loi des sauts est $P_1 - 1$ et $L_n = \text{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : X_i = -1\})$, on voit que

$$Y_n \qquad \text{et} \qquad L_n \quad \text{sachant que} \quad W_n = 0$$

ont la même loi.

↝ Notons $A_n^{(i)}(f) = \mathrm{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \ldots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \ldots, P_n) \quad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

↝ Soit $Y_n(f) = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : A_n^{(i)}(f) = 0\})$. Ainsi, en notant $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire dont la loi des sauts est $P_1 - 1$ et $L_n = \mathrm{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : X_i = -1\})$, on voit que

$$Y_n \qquad \text{et} \qquad L_n \quad \text{sachant que} \quad W_n = 0$$

ont la même loi.

↝ En appliquant les techniques précédentes, on voit que $\mathbb{E}[Y_n] \sim e^{-1} \cdot n$.

Notons $A_n^{(i)}(f) = \text{Card}(f^{-1}(\{i\}))$ et considérons $(P_1, \ldots, P_n)$ des variables aléatoires indépendantes de Poisson de paramètre 1 (ainsi $\mathbb{P}(P_1 = i) = e^{-1}/i!$ pour $i \geqslant 0$). Alors on voit que les vecteurs

$$(A_n^{(1)}, \ldots, A_n^{(n)}) \quad \text{et} \quad (P_1, \ldots, P_n) \quad \text{sachant que } P_1 + \cdots + P_n = n$$

ont la même loi.

Soit $Y_n(f) = \text{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : A_n^{(i)}(f) = 0\})$. Ainsi, en notant $(W_n)_{n \geqslant 0}$ une marche aléatoire dont la loi des sauts est $P_1 - 1$ et $L_n = \text{Card}(\{1 \leqslant i \leqslant n : X_i = -1\})$, on voit que

$$Y_n \qquad \text{et} \qquad L_n \quad \text{sachant que} \quad W_n = 0$$

ont la même loi.

En appliquant les techniques précédentes, on voit que $\mathbb{E}[Y_n] \sim e^{-1} \cdot n$. Il faut travailler un peu plus pour avoir les fluctuations gausiennes...

V. Limites d'échelles

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma} \cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée,

Limites d'échelle

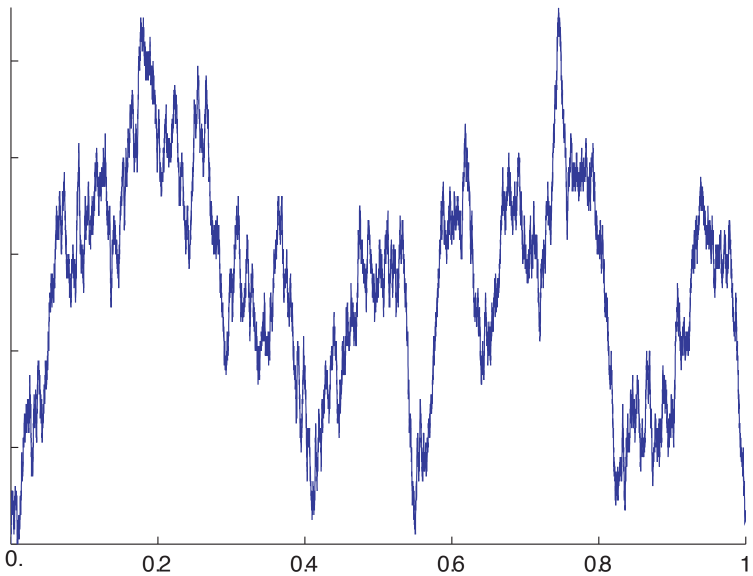
Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma} \cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 à l'instant 1 et à rester postif sur $[0, 1]$.



Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i\geqslant 0} i\mu(i)=1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma}\cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 *à l'instant* 1 *et à rester postif sur* $[0,1]$.

Conséquence 1 : pour tout $a>0$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sigma}{2}\cdot \textbf{Hauteur}(\mathcal{T}_n) > a\cdot\sqrt{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to\infty]{} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(4k^2a^2-1)e^{-2k^2a^2}.$$

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i \geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n) \right)_{0 \leqslant t \leqslant 1} \quad \xrightarrow[n \to \infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma} \cdot \mathbb{e}(t) \right)_{0 \leqslant t \leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 à l'instant 1 et à rester postif sur $[0, 1]$.

Mais peut-on dire que $\mathcal{T}_n$, convenablement mis à l'échelle, converge vers un arbre aléatoire continu limite ?

Limites d'échelle

Soit μ une loi de reproduction critique ($\sum_{i\geqslant 0} i\mu(i) = 1$) de variance finie. Soit $\mathcal{T}_n$ un arbre de Bienaymé–Galton–Watson conditionné à avoir n sommets.

Théorème (Aldous '93)

Soit σ^2 la variance de μ. Alors :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} C_{2nt}(\mathcal{T}_n)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1} \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \left(\frac{2}{\sigma}\cdot \mathbb{e}(t)\right)_{0\leqslant t\leqslant 1},$$

où $\mathbb{e}$ est l'excursion brownienne normalisée, qui peut être vue comme le mouvement brownien conditionné à revenir en 0 *à l'instant* 1 *et à rester postif sur* $[0, 1]$.

Mais peut-on dire que $\mathcal{T}_n$, convenablement mis à l'échelle, converge vers un arbre aléatoire continu limite ?

$\rightsquigarrow$ Conséquence 2 : Oui, lorsqu'on voit $\mathcal{T}_n$ comme un espace métrique compact en munissant ses sommets de la distance de graphe.

La distance de Hausdorff

Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z.

La distance de Hausdorff

Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z. Si

$$X_r = \{z \in Z; d(z, X) \leqslant r\}, \qquad Y_r = \{z \in Z; d(z, Y) \leqslant r\}$$

sont les r-voisinages de X et Y

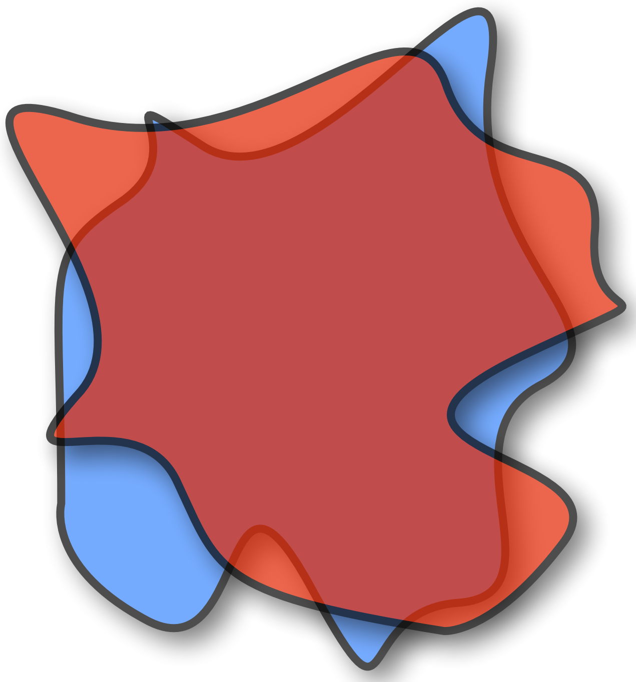
La distance de Hausdorff

Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z. Si

$$X_r = \{z \in Z; d(z, X) \leqslant r\}, \qquad Y_r = \{z \in Z; d(z, Y) \leqslant r\}$$

sont les r-voisinages de X et Y, on pose

$$d_H(X, Y) = \inf\{r > 0; X \subset Y_r \text{ et } Y \subset X_r\}.$$



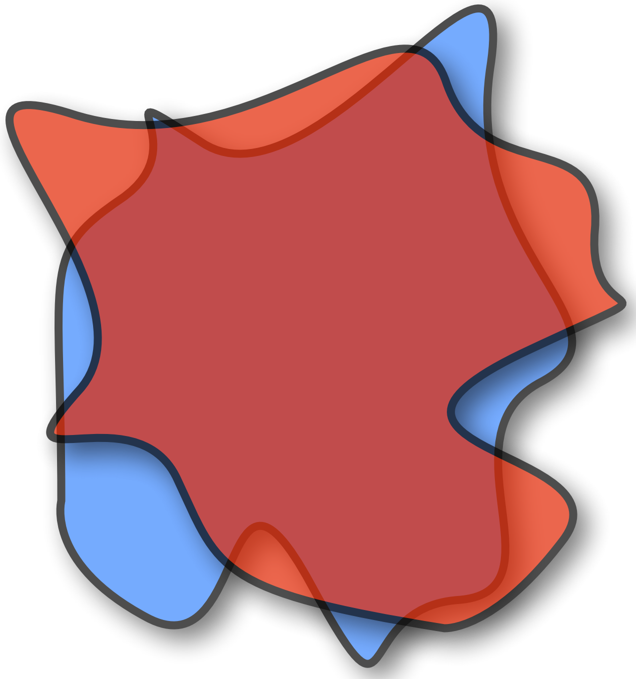
La distance de Hausdorff

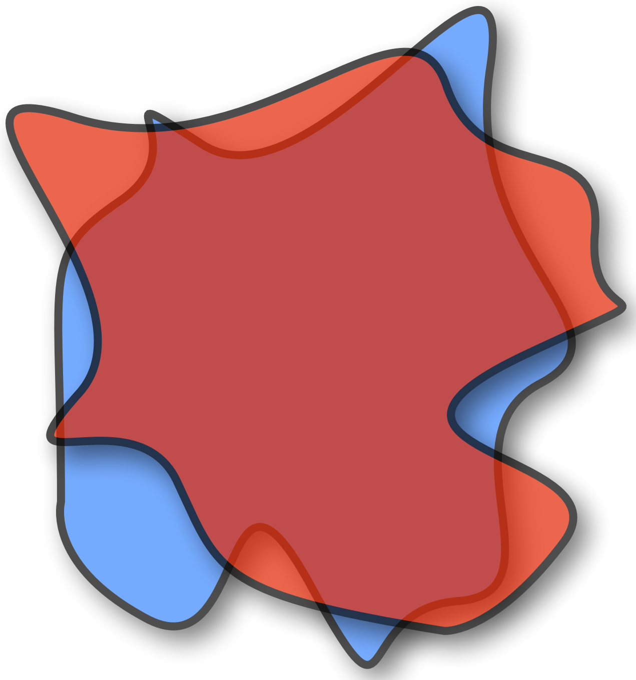
Soient X, Y deux sous-ensembles d'un même espace métrique Z. Si

$$X_r = \{z \in Z; d(z, X) \leqslant r\}, \qquad Y_r = \{z \in Z; d(z, Y) \leqslant r\}$$

sont les r-voisinages de X et Y, on pose

$$d_H(X, Y) = \inf\{r > 0; X \subset Y_r \text{ et } Y \subset X_r\}.$$



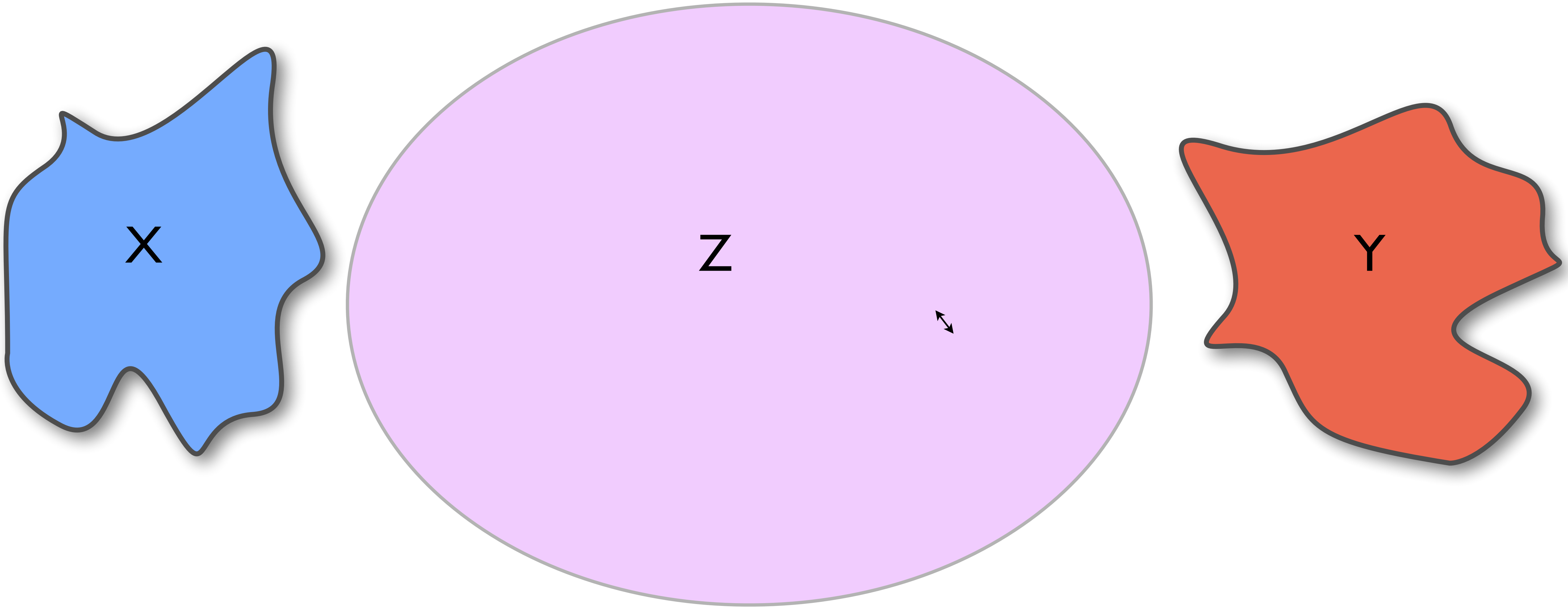


La distance de Gromov–Hausdorff

Soient X, Y deux espaces métriques compacts

La distance de Gromov–Hausdorff

Soient X, Y deux espaces métriques compacts



La distance de Gromov–Hausdorff entre X et Y est la plus petite distance de Hausdorff entre tous les plongements isométriques possibles de X et Y dans un *même* espace métrique compact Z.

L'arbre brownien

$\leadsto$ Conséquence du théorème d'Aldous (Duquesne, Le Gall) : il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{T}_{\mathbb{e}}$ tel que la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot \mathcal{T}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_{\mathbb{e}},$$

ait lieu en loi pour la distance de Gromov–Hausdorff.

L'arbre brownien

$\rightsquigarrow$ Conséquence du théorème d'Aldous (Duquesne, Le Gall) : il existe un espace métrique compact aléatoire $\mathcal{T}_{\mathbb{e}}$ tel que la convergence

$$\frac{\sigma}{2\sqrt{n}} \cdot \mathcal{T}_n \quad \xrightarrow[n\to\infty]{(d)} \quad \mathcal{T}_{\mathbb{e}},$$

ait lieu en loi pour la distance de Gromov–Hausdorff.

L'espace métrique $\mathcal{T}_{\mathbb{e}}$ est appelé *arbre brownien continu*, et est codé par l'excursion brownienne.